



مدارهای الکتریکی ۱

دکتر عبدالمحمد شبانی دکتر رحمت الله هوشمند



آزمایشی



مدارهای الکتریکی ۱

(رشته مهندسی کامپیوتر)

دکتر عبدالمحمد شیبانی دکتر رحمت الله هوشمند

شیبانی، عبدالمحمد، مدارهای الکتریکی ۱ (رشته مهندسی کامپیوتر) / مؤلفان عبدالمحمد شیبانی، رحمت الله هوشمند. — تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۸۳. دوازده، ۳۷۳ ص.: مصور. — (دانشگاه پیام نور؛ ۱۱۰۵. گروه کامپیوتر؛ ۱/۵) فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیبا. واژه نامه.	
۱. آموزش از راه دور_ ایران. ۲. مدارهای برقی_ آموزش برنامه ای. ۳. مدارهای برقی — مسائل، تمرینها و غیره (عالی). الف. هوشمند، رحمت الله، ۱۳۴۶ ب. دانشگاه پیام نور. ج. عنوان.	۳۷۸ / ۱۷۵۰۹۵۵ LC ۵۸۰۸ / الف ۸۷۲۳ کتابخانه ملی ایران
۳۷۸ / ۱۷۵۰۹۵۵	۸۷۲۳ / الف ۵۸۰۸
۳۱۸۰۲ - ۸۳ م	

ISBN 964 - 387 - 125 - 8

شابک ۸ - ۱۲۵ - ۳۸۷ - ۹۶۴



دانشگاه پیام نور

مدارهای الکتریکی ۱

دکتر عبدالمحمد شیبانی و دکتر رحمت الله... هوشمند

ویراستار علمی: دکتر داود کریم زادگان مقدم

حروفچینی و نمونه خوانی: مدیریت تدوین

طراح جلد: فرشته فلاح دوست

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام نور

شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول دی ۱۳۸۳

کلیه حقوق برای دانشگاه پیام نور محفوظ است.

قیمت در تمام کشور: ۲۵۰۰۰ ریال

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل اول: مقدمه
۱	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- متغیرهای شبکه
۷	۳-۱- تعیین جهت‌های مبنا برای متغیرهای الکتریکی
۱۴	۴-۱- دسته بندی انواع عناصر شبکه‌های الکتریکی
۱۶	۵-۱- قوانین کیرشهف
۱۸	۱-۵-۱- قانون جریان کیرشهف
۲۰	۲-۵-۱- قانون ولتاژ کیرشهف
۲۱	۶-۱- شبکه‌های مسطح و غیرمسطح
۲۲	۷-۱- خلاصه و نتیجه‌گیری
۲۳	۸-۱- مسائل مروری

فصل دوم: منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی

۲۷	۱-۲- مقدمه
۲۷	۲-۲- مقاومت‌های الکتریکی
۳۰	۳-۲- منابع الکتریکی
۳۰	۱-۳-۲- منابع الکتریکی مستقل
۳۲	۲-۳-۲- منابع الکتریکی وابسته
۳۳	۴-۲- مدار معادل تونن و نورتن
۳۴	۵-۲- مفاهیم سری و موازی مقاومت‌ها و ساده سازی آنان
۳۴	۱-۵-۲- اتصال سری مقاومت‌ها
۳۶	۲-۵-۲- اتصال موازی مقاومت‌ها
۳۸	۶-۲- مفاهیم سری و موازی منابع الکتریکی
۴۰	۷-۲- مشخصات ولتاژ و جریان در مدارهای ساده الکتریکی

۴۴	۸-۲- خلاصه و نتیجه‌گیری
۴۵	۹-۲- مسائل مروری

فصل سوم: روش‌های تحلیل شبکه‌های مقاومتی

۵۱	۱-۳- مقدمه
۵۱	۲-۳- روش تحلیل مش
۵۲	۱-۲-۳- معادلات مش برای مدارهای ساده
۵۷	۲-۲-۳- معادلات مش در مدارهای با منابع وابسته
۶۰	۳-۳- روش تحلیل گره
۶۰	۱-۳-۳- معادلات گره برای مدارهای ساده
۶۵	۲-۳-۳- معادلات گره در مدارهای با منابع وابسته
۶۸	۴-۳- روش تحلیل جمع‌آثار
۷۱	۵-۳- روش حل با استفاده از قضایای تونن و نورتن
۷۶	۶-۳- خلاصه و نتیجه‌گیری
۷۶	۷-۳- مسائل مروری

فصل چهارم: خازن‌ها و سلف‌ها

۸۳	۱-۴- مقدمه
۸۴	۲-۴- خازن الکتریکی
۸۵	۳-۴- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان
۸۸	۴-۴- بعضی توابع زمانی مورد نیاز
۹۴	۵-۴- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک خازن الکتریکی
۹۷	۶-۴- سلف‌ها
۹۸	۷-۴- سلف خطی تغییرناپذیر با زمان
۱۰۱	۸-۴- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک سلف
۱۰۳	۹-۴- ترکیب سری و موازی خازن‌ها و سلف‌ها
۱۰۹	۱۰-۴- اندوکتانس متقابل و ترانسفورماتور
۱۰۹	۱۰-۴-۱- سلف‌های ترویج شده

۱۱۶	 ۴-۱۰-۲- ترانسفورماتور ایده‌ال با دو سیم‌پیچ
۱۱۸	 ۴-۱۱- خلاصه و نتیجه گیری
۱۱۹	 ۴-۱۲- مسائل مروری

فصل پنجم: مدارهای الکتریکی مرتبه اول

۱۲۳	 ۵-۱- مقدمه
۱۲۴	 ۵-۲- پاسخ ورودی صفر
۱۲۴	 ۵-۲-۱- مدار الکتریکی RC
۱۲۷	 ۵-۲-۲- مدار الکتریکی RL
۱۲۹	 ۵-۲-۳- مدارهای جامع تر RC و RL
۱۳۱	 ۵-۳- پاسخ حالت صفر
۱۳۴	 ۵-۴- پاسخ کامل
۱۳۷	 ۵-۵- شرایط اولیه در مدارهای با کلیدزنی
۱۴۱	 ۵-۶- خلاصه و نتیجه گیری
۱۴۱	 ۵-۷- مسائل مروری

فصل ششم: مدارهای الکتریکی مرتبه دوم

۱۴۷	 ۶-۱- مقدمه
۱۴۷	 ۶-۲- پاسخ ورودی صفر- تحریک با شرایط اولیه
۱۵۳	 ۶-۳- پاسخ حالت صفر- تحریک با منابع ورودی
۱۵۶	 ۶-۴- پاسخ کامل مدارهای خطی مرتبه دوم
۱۵۹	 ۶-۵- پاسخ مدارهای خطی به ورودی تابع پله
۱۶۰	 ۶-۶- خلاصه و نتیجه گیری
۱۶۱	 ۶-۷- مسائل مروری

فصل هفتم: تجزیه و تحلیل مدارها در حالت دائمی سینوسی

۱۶۷	 ۷-۱- مقدمه
-----	------------------

۱۷۱	۲-۷- نمایش فازور در توابع سینوسی
۱۷۵	۳-۷- روابط فازوری اجزاء مدار (R و L و C)
۱۷۶	۱-۳-۷- روابط فازوری عنصر مقاومت
۱۷۷	۲-۳-۷- روابط فازوری عنصر سلف
۱۷۹	۳-۳-۷- روابط فازوری عنصر خازن
۱۸۱	۴-۷- تعریف مفاهیم امپدانس و ادمیتانس
۱۸۱	۱-۴-۷- تعریف امپدانس
۱۸۳	۲-۴-۷- تعریف ادمیتانس
۱۸۴	۳-۴-۷- سری و موازی امپدانس‌ها و ادمیتانس‌ها
۱۸۸	۵-۷- تجزیه و تحلیل گره و حلقه در حالت دائمی سینوسی
۱۸۹	۱-۵-۷- تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی
۱۹۰	۲-۵-۷- تحلیل حلقه در حالت دائمی سینوسی
۱۹۲	۶-۷- تجزیه و تحلیل جمع‌آثار در حالت دائمی سینوسی
۱۹۴	۷-۷- تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از مدار معادل تونن
۱۹۶	۸-۷- توان در مدارهای با تحریک سینوسی
۱۹۸	۱-۸-۷- توان در یک بار اهمی با تحریک سینوسی
۱۹۸	۲-۸-۷- توان در یک بار سلفی خالص با تحریک سینوسی
۱۹۹	۳-۸-۷- توان در یک بار خازنی خالص با تحریک سینوسی
۲۰۰	۴-۸-۷- ارتباط توان‌های حقیقی، موهومی و ظاهری
۲۰۵	۹-۷- قضیه حداکثر توان انتقالی
۲۰۷	۱۰-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری
۲۰۸	۱۱-۷- مسائل مروری

فصل هشتم: تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

۲۱۵	۱-۸- مقدمه
۲۱۶	۲-۸- تعریف تبدیل لاپلاس
۲۱۸	۳-۸- خواص اساسی تبدیل لاپلاس
۲۱۸	۱-۳-۸- خاصیت یکتایی

۲۱۸	۸-۳-۲- خاصیت خطی بودن
۲۱۹	۸-۳-۳- خاصیت مشتق‌گیری متوالی
۲۲۱	۸-۳-۴- خاصیت انتگرال‌گیری
۲۲۳	۸-۴- تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی
۲۳۳	۸-۵- تبدیل لاپلاس معکوس توابع پیچیده
۲۳۹	۸-۶- کاربردهای اولیه از تبدیل لاپلاس
۲۳۹	۸-۶-۱- مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس
۲۴۰	۸-۶-۲- پاسخ حالت کامل مدارهای الکتریکی
۲۴۴	۸-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری
۲۴۵	۸-۸- مسائل مروری

فصل نهم: توابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی

۲۴۹	۹-۱- مقدمه
۲۴۹	۹-۲- تابع شبکه، امیدانس و ادمیتانس شبکه
۲۵۳	۹-۳- تابع شبکه به صورت تابع انتقال
۲۵۷	۹-۴- قطب‌ها، صفرها و تابع شبکه
۲۶۱	۹-۵- فرکانس‌های طبیعی
۲۶۱	۹-۵-۱- فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه
۲۶۵	۹-۵-۲- فرکانس‌های طبیعی یک شبکه
۲۶۸	۹-۶- تعیین فرکانس‌های طبیعی با استفاده از تابع شبکه
۲۷۱	۹-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری
۲۷۲	۹-۸- مسائل مروری

فصل دهم: شبکه‌های دو قطبی

۲۷۷	۱۰-۱- مقدمه
۲۷۷	۱۰-۲- شبکه‌های تک قطبی
۲۸۱	۱۰-۳- شبکه دو قطبی
۲۸۲	۱۰-۴- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای Z

۲۸۷	۱۰-۵- پارامترهای امیدانس در اتصال سری شبکه‌های دو قطبی
۲۹۰	۱۰-۶- مدار معادل T یک شبکه دو قطبی
۲۹۲	۱۰-۷- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای Y
۲۹۷	۱۰-۸- پارامترهای ادمیتانس در اتصال موازی شبکه‌های دو قطبی
۲۹۹	۱۰-۹- مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی
۳۰۱	۱۰-۱۰- مدل شبکه‌های دو قطبی با پارامترهای هایبرید
۳۰۲	۱۰-۱۰-۱- ماتریس هایبرید G
۳۰۶	۱۰-۱۱- مدل شبکه‌های دو قطبی با پارامترهای انتقال
۳۱۲	۱۰-۱۲- کاربردهایی از پارامترهای شبکه‌های دو قطبی
۳۱۷	۱۰-۱۳- خلاصه و نتیجه‌گیری
۳۱۸	۱۰-۱۴- مسائل مروری

فصل یازدهم: سیستم‌های سه‌فاز متقارن

۳۲۳	۱۱-۱- مقدمه
۳۲۴	۱۱-۲- منابع سه‌فاز
۳۲۶	۱۱-۲-۱- اتصال ستاره منابع سه‌فاز
۳۲۸	۱۱-۲-۲- اتصال مثلث منابع سه‌فاز
۳۳۰	۱۱-۳- بارهای سه‌فاز متعادل
۳۳۴	۱۱-۴- توان در سیستم‌های سه‌فاز
۳۳۸	۱۱-۵- تحلیل مدارهای سه‌فاز متعادل
۳۴۲	۱۱-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری
۳۴۳	۱۱-۷- مسائل مروری

۳۴۷	کتابنامه
-----	----------

ضمیمه (الف): ماتریس‌ها و خواص آنان

۳۴۷	الف-۱) تعاریف اساسی
۳۴۹	الف-۲) خواص اساسی جبر ماتریس‌ها

الف-۳) نمایش ماتریسی معادلات جبری ۳۵۳

ضمیمه (ب): اعداد مختلط و خواص آنان

ب-۱) تعاریف مرتبط با اعداد مختلط ۳۵۷

ب-۲) تبدیل نمایش اعداد مختلط به یکدیگر ۳۵۸

ب-۳) خواص اعداد مختلط ۳۵۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۳۶۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۳۷۱

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

یکی از سیستم‌های مفید و پرکاربرد در صنایع کنونی، شبکه‌های الکتریکی می‌باشند که وظیفه تولید، انتقال و توزیع انرژی الکتریکی را بر عهده دارند. از خصوصیات مهم این سیستم‌ها نسبت به دیگر سیستم‌های موجود در صنعت، سهولت تبدیل انرژی الکتریکی به دیگر انواع انرژی‌ها و قابلیت توزیع در نواحی وسیع و همچنین سرعت زیاد در انتقال می‌باشد.

در شبکه‌های الکتریکی، تولید انرژی الکتریکی در مولدهای توربینی از تبدیل انرژی مکانیکی چرخشی به انرژی الکتریکی حاصل می‌شود. سپس این انرژی، توسط شبکه‌های انتقال به نقاط دور دست منتقل می‌گردد و در مراکز مورد نیاز، بین مصرف کنندگان توزیع می‌شود. بررسی مشخصات و کاربردهای وسایل و سیستم‌های تبدیل انرژی، پردازش و تحلیل این شبکه‌ها و نحوه انتقال انرژی بر عهده علم مهندسی برق گذاشته شده است. بنابراین، یکی از شاخه‌های مهم مطالعات در شبکه‌های الکتریکی، تحلیل این گونه شبکه‌ها (یا مدارهای الکتریکی) می‌باشد. بدین منظور ابتدا باید متغیرهای اساسی کاربردی در مدارهای الکتریکی بیان گردند که این امر در این فصل مهیا می‌گردد. با تعریف شدن این متغیرها و قوانین پایه کیرشهف^۱، در فصول بعدی قادر خواهیم بود تا به تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بپردازیم.

^۱ - Kirchhoff's Laws

۲-۱- متغیرهای شبکه

تاکنون سیستم‌های آحاد متعددی برای متغیرهای مورد نظر در شبکه‌های الکتریکی ارائه شده است، لیکن از میان انواع سیستم‌های آحاد، سیستم MKS کاربرد وسیعی در مهندسی برق دارد. این سیستم بر پایه واحدهای متر (m)، کیلوگرم (kg)، و ثانیه (sec) بنا شده است که بترتیب برای متغیرهای طول، جرم، و زمان به کار می‌روند. در سیستم‌های واقعی، مقدار این متغیرها از اعداد بسیار کوچک تا اعداد بسیار بزرگ در حال تغییر هستند. مقادیر بسیار کوچک و بسیار بزرگ را می‌توان با مضرب‌هایی از یکاهای پایه بیان نمود. در نتیجه می‌توان از آوردن تعداد زیادی صفر پیش از ممیز و یا بعد از آن پرهیز نمود. به عنوان مثال، برای نمایش 0.0035 sec می‌توان از نماد $3.5 \times 10^{-3} \text{ sec}$ استفاده نمود و یا اینکه به جای 8700 m ، می‌توان از نماد 8.7 km بهره جست. همچنین برای راحتی بیشتر نمایش مقادیر متغیرها به جای استفاده از یکاهای پایه می‌توان از کلمات پیشوند در جلوی واحدها بهره جست. به عنوان مثال، به جای 10^{-3} می‌توان از پیشوند "میلی" استفاده کرد و برای بیان $3.5 \times 10^{-3} \text{ sec}$ ، عبارت 3.5 میلی ثانیه (3.5 msec) را به کار برد. مضرب‌های معمول برای یکاهای پایه مورد استفاده در مدارهای الکتریکی را می‌توان در جدول (۱-۱) مشاهده نمود.

جدول (۱-۱): ضرایب معمول در مدارهای الکتریکی

نام مضرب	مضرب	نمایش مضرب
ترا	10^{+12}	T
گیگا	10^{+9}	G
مگا	10^{+6}	M
کیلو	10^{+3}	k
میلی	10^{-3}	m
میکرو	10^{-6}	μ
نانو	10^{-9}	n
پیکو	10^{-12}	p

اکنون قادر خواهیم بود که دیگر متغیرهای مورد استفاده در مدارهای الکتریکی را بیان نماییم.

الف) بار الکتریکی

کمیت بار الکتریکی^۱ در ارتباط با خواص اتم‌های ماده موردنظر می‌باشد. برای درک بهتر این موضوع، همان‌گونه که می‌دانیم، اتم‌های هر ماده از ذرات بنیادین الکترون، پروتون و نوترون تشکیل شده‌اند که تعداد الکترون‌ها و پروتون‌های هراتم با یکدیگر برابر می‌باشند. پروتون دارای بار مثبت، الکترون دارای بار منفی، و نوترون، دارای بار خنثی است؛ لذا هر اتم از نظر بار الکتریکی خنثی می‌باشد. حال اگر تعداد الکترون‌های یک اتم از تعداد پروتون‌های آن بیشتر گردد، اتم دارای بار منفی خواهد بود و بالعکس اگر الکترونی از مدار لایه آخری خارج شود، آنگاه اتم دارای بار مثبت خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم واحد بار الکتریکی را در سیستم MKS بیان کنیم. بار الکتریکی هر ماده که با $q(t)$ نمایش داده می‌شود، با واحد کولن^۲ C اندازه‌گیری می‌شود. هر کولن، بار معادل با مجموع بار الکتریکی $6/3 \times 10^{18}$ الکترون می‌باشد. به عبارت دیگر، بار هر الکترون، معادل با $1/602 \times 10^{-19} C$ در نظر گرفته می‌شود.

مهمترین اثر بارهای الکتریکی، توانایی آنان در تولید نیروهای جاذبه یا دافعه می‌باشد. به عبارت دیگر، بارهای همنام الکتریکی، یکدیگر را دفع و بارهای غیرهمنام، یکدیگر را جذب می‌کنند. جذب و دفع این بارهای الکتریکی توسط جاذبه نیروهای جاذبه و دافعه ایجاد شده می‌باشد که نیروی وارد بر هر یک از ذرات به مقدار مساوی می‌باشند.

ب) جریان الکتریکی

در صورتی که یک بار الکتریکی بین دو صفحه به حرکت در آید، آهنگ حرکت این بار بر حسب زمان را جریان الکتریکی^۳ می‌نامیم. انتقال بار در یک هادی را می‌توان بین دو سطح از سطح مقطع هادی مذکور در نظر گرفت. کمیت جریان الکتریکی توسط متغیر $i(t)$ نمایش داده می‌شود که واحد آن در سیستم MKS، برابر آمپر (A) می‌باشد. در صورتی که میزان تغییرات بار عبوری در واحد زمان، متغیر باشد، آنگاه جریان الکتریکی در هر لحظه تغییر می‌کند که برابر است با:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1-1)$$

و یا،

^۱ - Electric Charge

^۲ - Coulomb

^۳ - Electric Current

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2-1)$$

حال اگر نرخ تغییرات بار در واحد زمان، ثابت باشد (که این بار را با حرف بزرگ Q نشان می‌دهیم) آنگاه جریان الکتریکی ثابت I به مقدار زیر خواهد بود:

$$I = Q/t$$

ج) انرژی الکتریکی

در توضیح کمیت بار الکتریکی بیان شد که اگر هر بار الکتریکی در نزدیکی بار الکتریکی دیگری قرار گیرد، بر آن بار، نیرویی به صورت جاذبه یا دافعه وارد می‌شود. به عبارت دیگر، در اطراف هر بار الکتریکی، محدوده‌ای وجود دارد که بر بارهای الکتریکی در آن محدوده، نیرو وارد می‌شود. هر چه بار جدید در فاصله دورتری از بار اصلی قرار گیرد، این نیرو ضعیف‌تر خواهد بود. به این محدوده اطراف بار الکتریکی، میدان الکتریکی می‌گوییم. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی در هر نقطه، برابر نیروی مؤثر وارد بر واحد بار الکتریکی مثبت در آن نقطه می‌باشد. حال اگر بخواهیم بار الکتریکی را در یک میدان الکتریکی و در جهت خلاف میدان (یعنی علیه نیرویی که بارهای الکتریکی دیگر بر آن وارد می‌کنند) جابجا کنیم، نیاز به انجام کار و صرف انرژی می‌باشد.

انرژی الکتریکی می‌تواند از انواع دیگر انرژی‌ها از قبیل انرژی شیمیایی (در عملکرد باتری‌ها)، انرژی مکانیکی (در عملکرد ژنراتورهای آبی یا بخاری)، و انرژی اتمی (در راکتورهای هسته‌ای) ایجاد شود. در سیستم MKS، انرژی الکتریکی (یا کار) با متغیر $w(t)$ نشان داده می‌شود و واحد آن هم با ژول (نمایش با حرف J) بیان می‌گردد.

د) ولتاژ الکتریکی

در قسمت قبل دیدیم که برای حرکت یک بار در میدان الکتریکی، نیاز به انجام کار و صرف انرژی می‌باشد. به عبارت دیگر، با حرکت بار الکتریکی و دریافت انرژی، میزان انرژی پتانسیل بار افزایش می‌یابد. بدین‌سان می‌توان گفت که میدان الکتریکی می‌تواند وسیله ذخیره‌سازی انرژی در خود (برای تبدیل آن به کار) باشد.

حال، ولتاژ الکتریکی یا اختلاف پتانسیل را می‌توان به صورت کار واحد بار الکتریکی مثبت در حال حرکت بین دو نقطه از میدان تعریف نمود. در سیستم MKS، متغیر ولتاژ الکتریکی با $v(t)$ نمایش داده می‌شود و واحد آن با ولت (نمایش با حرف V) بیان می‌گردد.

بنا به تعریف، اختلاف ولتاژ یک ولت، بیانگر آن است که برای حرکت بار الکتریکی به مقدار یک کولن بین دو نقطه موردنظر، یک ژول انرژی مورد نیاز می باشد؛ یعنی:

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (۳-۱)$$

که در این رابطه، $v(t)$ اختلاف ولتاژ بین دو نقطه موردنظر بر حسب ولت (V)، $w(t)$ انرژی الکتریکی بر حسب ژول (J)، و $q(t)$ بار الکتریکی بر حسب کولن (C) می باشد.

هـ) توان الکتریکی

بر حسب تعریف، نرخ تغییرات کار یا انرژی الکتریکی را بر حسب زمان، توان الکتریکی می نامیم. در سیستم MKS، این متغیر با اپراتور $p(t)$ نمایش داده می شود که واحد آن با وات (نمایش با حرف W) بیان می گردد. بر اساس تعریف ارائه شده می توان نوشت:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} \quad (۴-۱)$$

و یا،

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \quad (۵-۱)$$

با توجه به آنکه تعیین توان الکتریکی در شرایط $-\infty$ عملاً غیر ممکن است، لذا رابطه اخیر را می توان به صورت زیر اصلاح نمود:

$$w(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (۶-۱)$$

حال با توجه به روابط (۱-۱) و (۳-۱)، رابطه (۴-۱) را می توان به شکل ساده شده زیر نوشت:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dq(t)} \cdot \frac{dq(t)}{dt} \\ p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (۷-۱)$$

به عبارت دیگر، حاصل ضرب جریان الکتریکی در ولتاژ الکتریکی در هر لحظه را می توان به عنوان توان الکتریکی بیان نمود.

در صورتی که ولتاژ و جریان الکتریکی، برابر مقادیر ثابت V و I باشند آنگاه توان الکتریکی نیز ثابت و به مقدار زیر خواهد بود:

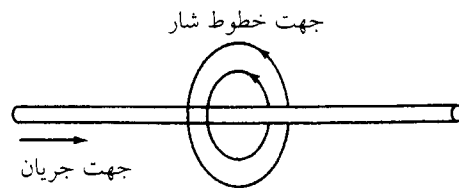
$$P = V.I$$

و انرژی الکتریکی دریافتی در مدت زمان t نیز برابر خواهد بود با:

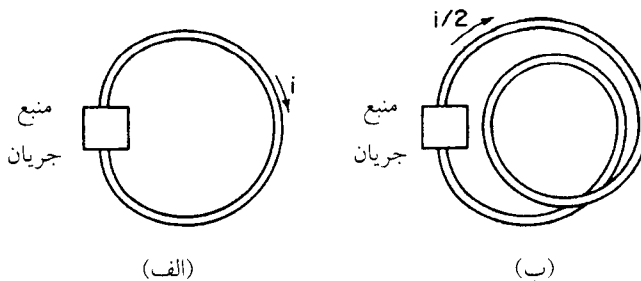
$$W = V.I.t$$

و) شار ارتباطی

در صورتی که از یک هادی، جریان الکتریکی عبور نماید، در اطراف این هادی، خطوط مغناطیسی مطابق با شکل (۱-۱) ایجاد می‌شود. به این خطوط، خطوط میدان مغناطیسی^۱ می‌گویند. هر چه به طرف سیم نزدیکتر شویم، این خطوط به هم فشرده تر شده و هر چه از سیم دورتر شویم، تراکم خطوط کمتر می‌گردد. در سیستم MKS، واحد این متغیر برابر وبر-دور^۲ (Wb-turn) می‌باشد. به عبارت دیگر، این متغیر از حاصل ضرب شار (بر حسب وبر) هر سیم در تعداد دور آن سیم به دست می‌آید. بنابراین، برای یک حلقه سیم مطابق با شکل (۱-۲-الف) در صورتی که جریان $i(t)$ از آن عبور کند و شار موردنظری را ایجاد کند، آنگاه اگر سیم، دو دور بزند، برای ایجاد همان شار، نیاز به جریان $i(t)/۲$ خواهد بود که این مطلب را می‌توان در شکل (۱-۲-ب) مشاهده نمود.



شکل (۱-۱): خطوط شار در اطراف یک هادی



شکل (۱-۲): خطوط شار ناشی از عبوری از یک سیم پیچ

حال اگر شار الکتریکی ناشی از یک مدار الکتریکی تغییر کند و یا اینکه حرکت هادی را در یک مداری داشته باشیم که شار را محصور می‌کند، آنگاه ولتاژی در مدار موردنظر القا می‌شود. اگر متغیر شار را با $\phi(t)$ نمایش دهیم آنگاه بین ولتاژ القایی و شار عبوری از مدار، رابطه زیر برقرار می‌باشد:

^۱ - Magnetic Flux^۲ - Weber-turn

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (۸-۱)$$

و یا اینکه،

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (۹-۱)$$

به این رابطه، قانون القای فارادی می‌گویند.

تا اینجا با متغیرهای اساسی برای تحلیل مدارهای الکتریکی آشنا شدیم. مشخصات این متغیرها به‌طور خلاصه در جدول (۲-۱) آورده شده است.

جدول (۲-۱): متغیرهای اساسی مدارهای الکتریکی و مشخصات آنها

متغیر	نمایش متغیر	واحد	نمایش واحد	رابطه واحد
بار الکتریکی	$q(t)$	کولن	C	$q(t) = \int i(t) dt$
جریان الکتریکی	$i(t)$	آمپر	A	$i(t) = dq(t)/dt$
انرژی الکتریکی	$w(t)$	ژول	J	$w(t) = \int p(t) dt$
ولتاژ الکتریکی	$v(t)$	ولت	V	$v(t) = dw(t)/dq(t)$
توان الکتریکی	$p(t)$	وات	W	$p(t) = v(t)i(t) = dw(t)/dt$
شار مغناطیسی	$\phi(t)$	وبر-دور	Wb-turn	$\phi(t) = \int v(t) dt$

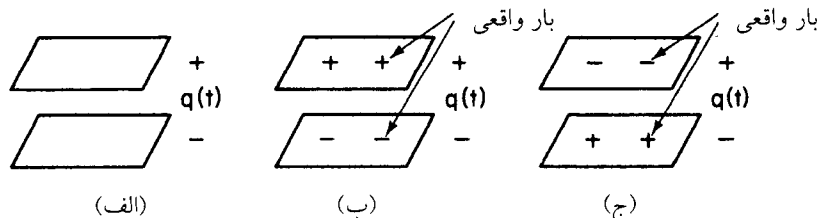
۳-۱- تعیین جهت‌های مبنا برای متغیرهای الکتریکی

در بخش قبلی با متغیرهای اساسی مدارهای الکتریکی آشنا شدیم. در این بخش می‌خواهیم جهت‌های قراردادی و مقادیر مثبت و منفی متغیرهایی از قبیل $q(t)$ ، $i(t)$ ، $v(t)$ ، و $p(t)$ را مشخص نماییم. این عمل توسط علامت‌های مثبت و منفی و بردارهای مشخص‌کننده جهت صورت می‌گیرد.

الف) جهت‌های مبنا برای متغیر بار الکتریکی

برای پی بردن به جهت‌های قراردادی برای تغییرات بار الکتریکی $q(t)$ ، دو صفحه هادی مجزا مطابق با شکل (۴-۱-الف) را در نظر بگیرید. بار الکتریکی بین دو صفحه مورد نظر با دو علامت مبنای + و - مشخص می‌شود که به‌صورت مرجع و مبنا در نظر

گرفته می‌شود. پلاریته مثبت و منفی برای بیان $q(t)$ ، هیچ ارتباطی با بار واقعی موجود بر روی دو صفحه هادی ندارد. حال اگر در زمان خاصی، بار واقعی روی صفحه بالایی دارای پلاریته مثبت باشد و صفحه پایینی دارای بار با پلاریته منفی باشد، آنگاه می‌توان گفت که مقدار $q(t)$ دارای علامت مثبت در زمان موردنظر می‌باشد. به عبارت دیگر، مثبت بودن مقدار $q(t)$ به این معنا است که صفحه بالایی نسبت به صفحه پایینی، دارای بار مثبت بیشتری می‌باشد که این موضوع در شکل (۱-۴-ب) نشان داده شده است. حال اگر با پلاریته مبنای مثبت و منفی برای متغیر $q(t)$ ، صفحه بالایی دارای بار الکتریکی با پلاریته منفی و صفحه پایینی دارای بار الکتریکی با علامت مثبت باشد، آنگاه متغیر $q(t)$ برابر یک مقدار منفی خواهد بود که در شکل (۱-۴-ج) مشخص شده است. مقدار منفی $q(t)$ به این معنا است که صفحه پایینی با علامت مرجع منفی، دارای بار الکتریکی مثبت بیشتری نسبت به صفحه بالایی با علامت مرجع مثبت در زمان موردنظر t می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که علامت‌های قراردادی و مرجع + و - هیچ ارتباطی با مقدار بارهای الکتریکی بر روی دو صفحه ندارد و مقدار بارهای روی صفحات نسبت به یکدیگر، با علامت مقدار $q(t)$ مشخص می‌گردد.



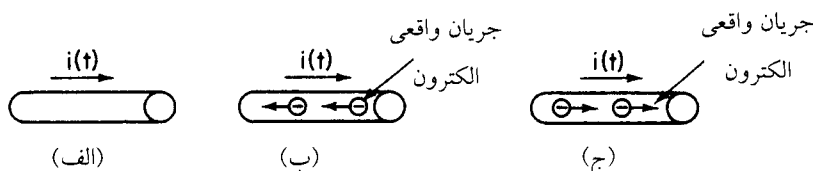
شکل (۱-۴-الف) جهت‌های قراردادی و مبنا برای بار الکتریکی $q(t)$ در بین دو

صفحه؛ (ب) $q(t) > 0$ ؛ (ج) $q(t) < 0$

ب) جهت‌های مبنا برای متغیر جریان الکتریکی

برای این منظور، یک هادی الکتریکی مطابق شکل (۱-۵-الف) در نظر بگیرید. برای نمایش جهت جریان $i(t)$ در کنار هادی، یک پیکان قرار می‌دهیم که آن را به عنوان جهت مبنا در نظر می‌گیریم. حال اگر در یک زمان خاص، جهت واقعی حرکت بارهای الکتریکی با علامت منفی (و یا الکترون‌های آزاد در هادی) در خلاف جهت پیکان مبنا باشد، آنگاه مقدار جریان، برابر یک مقدار مثبت خواهد بود که این موضوع در شکل (۱-۵-ب) نشان داده شده است. به عبارت دیگر، جهت مثبت قراردادی برای جریان، بر مبنای جهت حرکت حفره‌های ایجاد شده ناشی از حرکت الکترون‌ها می‌باشد. همچنین اگر جهت حرکت

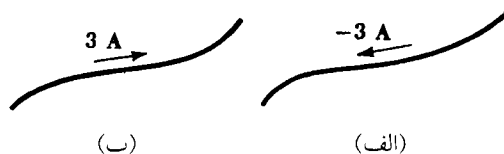
بارهای الکتریکی با بار منفی، هم جهت با جهت قراردادی جریان $i(t)$ در زمان موردنظر باشد، آنگاه مقدار جریان الکتریکی را با علامت منفی در نظر می‌گیریم که در شکل (۵-۱-ج) مشخص شده است.



شکل (۵-۱): (الف) جهت‌های مبنا و قراردادی برای جریان الکتریکی؛ (ب) $i(t) > 0$ ؛ (ج) $i(t) < 0$

بر اساس توضیحات ارائه‌شده درمی‌یابیم که جریان الکتریکی با علامت مثبت، معرف جهت حرکت بارهای مثبت (یا جهت حرکت حفره‌های ایجاد شده ناشی از حرکت الکترون‌ها) می‌باشد. البته این موضوع، علی‌رغم این مطلب است که می‌دانیم جریان الکتریکی در هادی‌ها از حرکت الکترون‌های با بار منفی ایجاد می‌شود. همچنین در می‌یابیم که جهت پیکان جریان، معرف جهت واقعی جریان نمی‌باشد بلکه جهت جریان، با توجه به مقدار جریان به همراه جهت پیکان قراردادی به دست می‌آید. بنابراین، صحبت از مقدار جریان $i(t)$ بدون توجه به جهت قراردادی پیکان جریان، بی‌مفهوم است.

مثال (۱-۱): در صورتی که در یک هادی الکتریکی، جریان الکتریکی واقعی به مقدار ۳A باشد، برای نمایش این جریان می‌توان به دو روش بر اساس جهت‌های قراردادی جریان مطابق با شکل (۱-۶-الف و ب) ارائه نمود. در این شکل، جهت جریان در هر دو حالت از سمت چپ به راست می‌باشد.



شکل (۱-۶): دو روش برای نمایش جریان ۳A با جهت واقعی یکسان

ج) جهت‌های مبنا برای ولتاژ الکتریکی

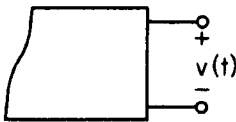
بدین منظور، دو ترمینال متصل به شبکه الکتریکی را مطابق شکل (۱-۷-الف) در نظر بگیرید. شبکه موردنظر، شکل خاصی ندارد و فقط دو سر سیم از آن خارج شده است تا از

این طریق، به عناصر دیگری متصل شود. حال در زمان دلخواه t ، این دو سر دارای اختلاف ولتاژی به مقدار $v(t)$ و با علامت‌های قراردادی مثبت و منفی (مطابق با شکل) هستند. هنگامی که ولتاژ واقعی ترمینال بالایی بیشتر از ولتاژ واقعی ترمینال پایینی باشد، آنگاه گفته می‌شود که ولتاژ $v(t)$ دارای اختلاف ولتاژی با علامت مثبت است که در شکل (۱-۷-ب) مشخص شده است. همچنین اگر اختلاف ولتاژ ترمینال بالایی نسبت به ترمینال پایینی، دارای یک مقدار منفی باشد، آنگاه می‌توان گفت که ولتاژ $v(t)$ با جهت‌های قراردادی ارائه شده در شکل (۱-۷-ج) در لحظه موردنظر t ، دارای مقدار منفی است.

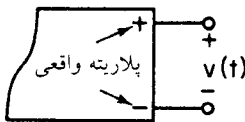
لازم به ذکر است که جهت‌های قراردادی را می‌توان به‌طور دلخواه تعیین نمود؛ زیرا آنها به‌تنهایی درباره اینکه چه ولتاژی بین ترمینال‌ها وجود دارد، هیچ اطلاعاتی به ما نمی‌دهند. به‌عنوان مثال، وقتی که با عبارت $v_{AB}(t) > 0$ با جهت‌های قراردادی روبرو می‌شویم بیانگر آن است که ولتاژ ترمینال A و B نسبت به یکدیگر دارای اختلاف ولتاژ $v(t)$ می‌باشد؛ زیرا،

$$v(t) = v_A(t) - v_B(t) > 0 \quad (10-1)$$

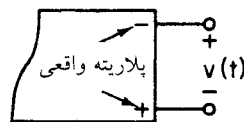
که $v_A(t)$ و $v_B(t)$ ولتاژ ترمینال‌های A و B نسبت به یک نقطه مرجع خاص می‌باشد.



(الف)



(ب)

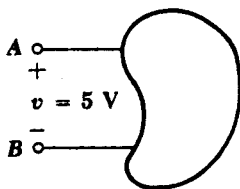


(ج)

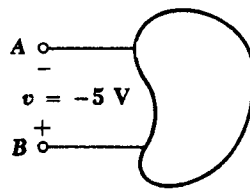
شکل (۱-۷-الف) جهت مبنا برای ولتاژ الکتریکی $v(t)$ بین دو ترمینال A و B؛ (ب)

$$v(t) > 0 \text{ (ج) ; } v(t) < 0$$

مثال (۱-۲): برای نمایش اختلاف ولتاژ پنج ولت بین دو سر A و B، می‌توان با در نظر گرفتن جهت‌های قراردادی ارائه شده در شکل‌های (۱-۸-الف و ب) مشخص نمود.



(ب)

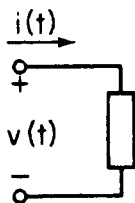


(الف)

شکل (۱-۸): دو حالت برای نمایش ولتاژ واقعی ۵V بین دو سر A و B

د) جهت‌های قراردادی برای عناصر دو سر

در اینجا، ابتدا عناصر دو سر را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در بحث مدارهای الکتریکی، به هر یک از این عناصر دو سر، شاخه مدار نیز می‌گوییم. از جمله این عناصر دو سر، می‌توان به مقاومت، سلف، خازن، دیود و بعضی عناصر دیگر اشاره نمود. برای هر عنصر دو سر، یک ولتاژ قراردادی با پلاریته‌های مثبت و منفی و یک جریان قراردادی با جهت مشخص در نظر می‌گیرند. جهت قراردادی برای پلاریته ولتاژ دو سر هر عنصر و جهت جریان قراردادی مستقل از یکدیگر هستند ولی معمول است که جهت‌هایی را انتخاب کنیم که به آنان، جهت‌های قراردادی متناظر^۱ می‌گویند. جهت قراردادی ولتاژ شاخه و جهت قراردادی جریان شاخه را متناظر با یکدیگر می‌گویند، اگر جریان مثبت از سری که علامت مثبت برای ولتاژ آن در نظر گرفته، وارد شاخه شده و از سری که دارای علامت منفی برای ولتاژ است، از شاخه خارج شود. این جهت‌های قراردادی متناظر، در عنصر دو سر شکل (۹-۱) نشان داده شده است.



شکل (۹-۱): جهت‌های قراردادی ولتاژ و جریان برای یک عنصر دو سر

ه) جهت‌های مبنا برای توان الکتریکی

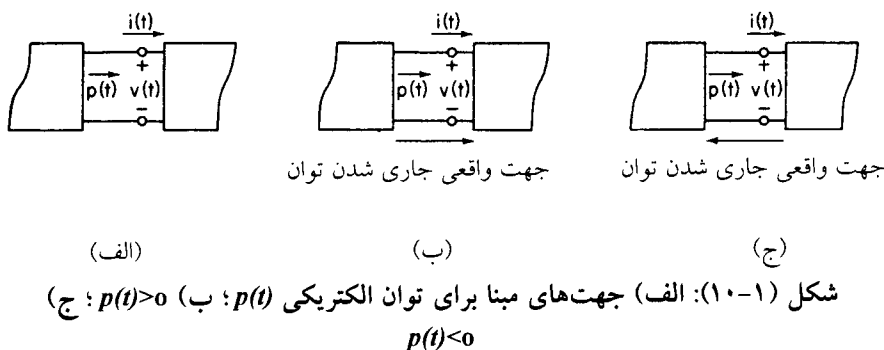
در بخش قبل بیان کردیم که توان الکتریکی در هر لحظه از زمان، از حاصل ضرب ولتاژ و جریان الکتریکی در آن لحظه از زمان به دست می‌آید؛ یعنی:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (۱۱-۱)$$

لذا با توجه به آنکه توان انتقالی، تابعی از دو متغیر ولتاژ و جریان الکتریکی می‌باشد، لذا جهت مبنای توان الکتریکی به جهت‌های مبنای ولتاژ و جریان الکتریکی بستگی خواهد داشت. برای درک بهتر این موضوع، مناسب است تا دو شبکه الکتریکی را در نظر بگیریم که از طریق دو ترمینال به یکدیگر متصل می‌شوند و جهت‌های مبنا برای ولتاژ، جریان و توان الکتریکی مطابق شکل (۱۰-۱-الف) در نظر گرفته شده است. حال اگر در یک زمان

^۱ - Associated Reference Direction

مشخصی، متغیرهای ولتاژ و جریان الکتریکی دارای پلاریته‌هایی مطابق شکل (۱-۱۰-ب) باشد و توان انتقالی هم مثبت باشد آنگاه جهت انتقال انرژی از شبکه سمت چپ به شبکه سمت راست خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر با پلاریته‌های موردنظر در شکل (۱-۱۰-ج)، جهت واقعی انتقال انرژی از شبکه سمت راست به شبکه سمت چپ باشد، آنگاه جهت مبنای در نظر گرفته شده برای توان الکتریکی، این متغیر دارای یک مقدار منفی خواهد بود.



موضوع انتقال توان الکتریکی بین دو شبکه را می‌توان برای یک عنصر دو سر مطابق شکل (۱-۹) نیز ارائه نمود. بر اساس قرار داد بیان شده، اگر جهت پیکان جریان الکتریکی و علامت‌های مثبت و منفی ولتاژ، به گونه‌ای بر روی سرهای یک عنصر قرار گرفته باشد که جریان الکتریکی از سر با پلاریته مثبت به عنصر وارد شود (مطابق با شکل ۱-۹) آنگاه توان الکتریکی جذب شده بدون توجه به مقادیر کمیت‌های ولتاژ و جریان الکتریکی، از حاصل ضرب جبری این دو کمیت به دست می‌آید. اگر مقدار عددی این حاصل ضرب، برابر یک مقدار منفی باشد، این به آن معنی است که این عنصر، توان الکتریکی منفی جذب می‌کند و یا به عبارت دیگر، توان الکتریکی تولید کرده و به دیگر عنصر تحویل می‌دهد. در نتیجه، علامت توان الکتریکی، جهت انتقال آن را مشخص می‌کند.

مثال (۱-۳): در سه عنصر دو سر ارائه شده در شکل (۱-۱۱-الف)، توان الکتریکی را محاسبه کنید.

حل: در عنصر ارائه شده در شکل (۱-۱۱-الف) توان الکتریکی برابر است با:

$$p(t) = 2 \times 3 = 6 \text{ W}$$

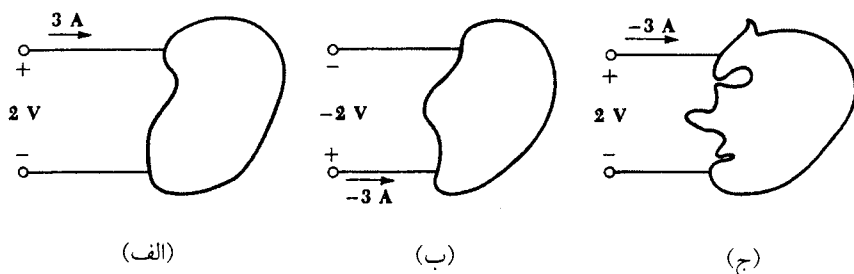
به عبارت دیگر می‌توان گفت که عنصر مذکور، توان الکتریکی 6 W را جذب (مصرف) می‌کند. برای عنصر شکل (۱-۱۱-ب) داریم:

$$p(t) = (-2) \times (-3) = 6 \text{ W}$$

لذا عنصر مذکور نیز همان توان 6 W را جذب می‌کند. اما برای عنصر شکل (۱۱-۱ ج) می‌توان نوشت:

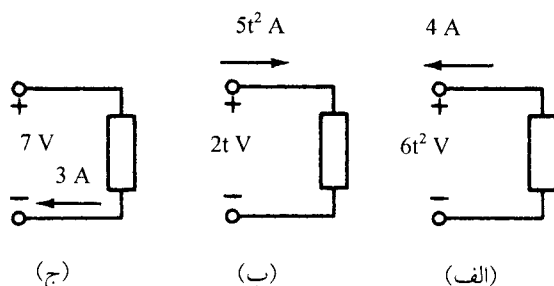
$$p(t) = 2 \times (-3) = -6 \text{ W}$$

یعنی آنکه عنصر مذکور، توان -6 W را جذب کرده و یا اینکه توان الکتریکی 6 W را تولید می‌کند و به بقیه عناصر مدار تحویل می‌دهد.



شکل (۱۱-۱): سه عنصر دو سر در حالت‌های مختلف نمایش مقادیر و جهت‌های ولتاژ و جریان

تمرین (۱-۱): توان جذب شده و انرژی انتقالی در زمان 10 sec را توسط هر یک از عناصر ارائه شده در شکل (۳-۱) بیابید. انرژی اولیه را برابر صفر در نظر بگیرید.



شکل (۳-۱): عناصر الکتریکی و ولتاژ و جریان و ولتاژ الکتریکی آنان

جواب: (الف) $W(t) = -8000 \text{ W} \cdot \text{sec} = -2/22 \text{ W} \cdot \text{h}$, $P(t) = -24t^2 \text{ W}$

(ب) $W(t) = 25000 \text{ W} \cdot \text{sec} = 6/94 \text{ W} \cdot \text{h}$, $P(t) = 10t^3 \text{ W}$

(ج) $W(t) = 210 \text{ W} \cdot \text{sec}$, $P(t) = 21 \text{ W}$

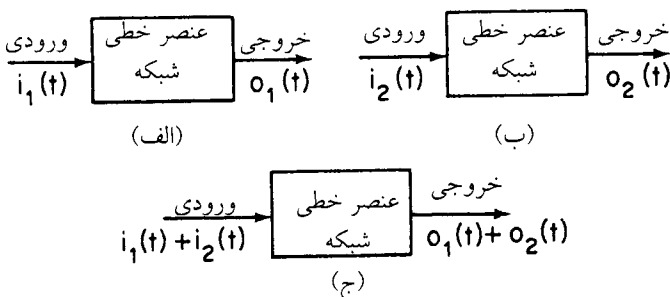
۱-۴- دسته بندی انواع عناصر شبکه های الکتریکی

قبل از آنکه به قوانین اساسی در تحلیل مدارهای الکتریکی اشاره کنیم، لازم است تا انواع عناصر موجود در این مدارها را مورد بررسی قرار دهیم. تفاوت میان عناصر شبکه های الکتریکی را می توان از جنبه های مختلفی بررسی نمود که در زیر به این تفاوت ها اشاره خواهیم کرد:

الف) خطی بودن در مقابل غیر خطی بودن

منظور از خطی بودن یک عنصر الکتریکی آن است که رابطه بین ولتاژ الکتریکی دو سر آن با جریان عبوری از آن عنصر، به وسیله یک تابع خطی بیان گردد. البته عناصر غیر خطی را می توان به صورت تقریب خطی در نظر گرفت؛ که شرایط این تقریب خطی آن است که تغییرات ولتاژ و جریان این عنصر در محدوده بسیار کوچکی در نظر گرفته شود. در شبکه های واقعی می توان گفت که کمتر عنصری وجود دارد که دارای خاصیت خطی بودن باشد.

موضوع خطی بودن یک عنصر را می توان از جهت دیگری نیز مورد بررسی قرار داد. برای این منظور، دو آزمایش بر روی عنصر مذکور انجام می شود. در آزمایش اول، با اعمال ورودی $i_1(t)$ ، خروجی متغیری از این عنصر برابر $O_1(t)$ می شود و در آزمایش دوم با اعمال ورودی $i_2(t)$ ، خروجی متغیر موردنظر برابر $O_2(t)$ می شود. این دو آزمایش در شکل های (۱-۱۲- الف و ب) نشان داده شده است. حال اگر این عنصر به صورت یک عنصر خطی باشد و مطابق با شکل (۱-۱۲- ج)، ورودی $i_1(t) + i_2(t)$ اعمال گردد، آنگاه خروجی متغیر موردنظر به مقدار $O_1(t) + O_2(t)$ خواهد بود. البته این مطلب در حالتی



شکل (۱-۱۲- الف و ب) دو آزمایش بر روی یک عنصر خطی شبکه ؛ (ج) اثر دو ورودی (الف) و (ب) بر روی شبکه

است که عنصر مذکور دارای حالت اولیه‌ای نباشد. به عبارت دیگر، اگر عنصری دارای خواص فوق نباشد، خاصیت غیر خطی بودن را به آن نسبت خواهیم داد. در این کتاب، عناصر مورد نظر به صورت عناصر خطی مد نظر می‌باشند.

ب) تغییرناپذیر با زمان در مقابل تغییرپذیر با زمان

دومین مشخصه از عناصر یک شبکه الکتریکی، خاصیت تغییرناپذیر بودن یا تغییرپذیر بودن با زمان است. اگر مشخصه‌های فیزیکی یک عنصر، بر حسب زمان تغییر نکند، گفته می‌شود که آن عنصر دارای خاصیت تغییرناپذیری با زمان است. البته در دنیای واقعی، عناصر تغییرناپذیر با زمان، بسیار کم می‌باشند و در صورتی که محدوده زمانی مورد نظر، بسیار کوتاه باشد آنگاه به طور تقریبی می‌توان عناصر را به صورت تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفت. در مدارهای الکتریکی مورد نظر در این کتاب، فرض می‌شود که عناصر به کار رفته دارای خاصیت تغییرناپذیر بودن با زمان در مدت زمان تحلیل مورد نظر می‌باشند.

ج) عناصر اکتیو (فعال) در مقابل عناصر پسیو (غیرفعال)

مفهوم اکتیو^۱ یا پسیو بودن^۲ عناصر، در ارتباط با جهت انتقال انرژی و توان الکتریکی به آن عناصر می‌باشد. در صورتی که کل انرژی تزریقی به عنصر یک شبکه (بدون توجه به نوع مدار الکتریکی)، غیر منفی باشد، آنگاه می‌توان گفت که عنصر مذکور، یک عنصر پسیو است. به عبارت دیگر، شرط پسیو بودن یک عنصر آن است که در مدت زمان t ،

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad (12-1)$$

در غیر این صورت، به عنصر مذکور، خاصیت اکتیو بودن اطلاق می‌شود. البته عناصر با خاصیت اکتیو بودن به ندرت در شبکه‌های الکتریکی به کار می‌روند. به عبارت دیگر، عناصر فیزیکی با خاصیت اکتیو بودن به ندرت پیدا می‌شود.

د) عناصر فشرده در مقابل عناصر گسترده

روند انتقال سیگنال‌های الکتریکی در یک هادی، انتقال یک موج در فلزات و یا جاری شدن سیالی در یک لوله، به هیچ وجه به طور لحظه‌ای و آنی انجام نمی‌شود. به عبارت دیگر، در دنیای واقعی و فیزیکی، ابعاد عناصر یک سیستم در تحلیل مسایل مذکور بسیار مهم

^۱- Active Element

^۲- Passive Element

می‌باشد. به عنوان مثال، خواص الکتریکی یک مقاومت ۱۰۰۰ اهمی با طول ۱cm متفاوت از یک مقاومت ۱۰۰۰ اهمی با طول ۱km می‌باشد.

هنگامی که ابعاد فیزیکی یک عنصر، در تحلیل آن با اهمیت باشد، آن عنصر به عنوان یک عنصر گسترده^۱ در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر اگر ابعاد فیزیکی عنصر مورد نظر، کوچک باشد؛ به گونه‌ای که ابعاد فیزیکی آن در تحلیل آن عنصر بی اهمیت باشد، عنصر از نوع فشرده^۲ خواهد بود. در این کتاب، فقط عناصر فشرده مورد نظر می‌باشند که از جمله این عناصر می‌توان به مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها و ترانسفورماتورهای آزمایشگاهی اشاره نمود. این کار به دو دلیل انجام می‌شود: اول آنکه فهمیدن و طرح مدارهای با عناصر فشرده، ساده تر است. دوم آنکه نظریه مدارهای با عناصر گسترده را می‌توان بر مبنای مدارهای فشرده بسط و گسترش داد.

پس به طور خلاصه می‌توان گفت که عناصر و مدارهای الکتریکی مورد بحث در این کتاب، دارای خواص تغییرناپذیری با زمان، خطی بودن، فشرده‌گی عناصر و پسیو بودن می‌باشند.

۱-۵- قوانین کیرشهف

در بخش (۱-۲)، متغیرهای مدارهای الکتریکی را بیان نمودیم که بعضی از این متغیرها با یکدیگر ارتباط منطقی دارند. بعضی از ارتباطات مورد نظر، بستگی به طبیعت متغیرها دارد. به عنوان مثال، ارتباطی که بین جریان الکتریکی $i(t)$ و بار الکتریکی $q(t)$ وجود دارد، ناشی از تعریف این متغیرها است که به صورت $i(t) = dq/dt$ می‌باشد. بعضی از ارتباطات بین متغیرها، مربوط به محدودیت نوع خاصی از عناصر شبکه می‌باشد. به عنوان مثال، برای هر مقاومت الکتریکی (به عنوان یک عنصر دو سر) بین ولتاژ دو سر آن و جریان الکتریکی عبوری، رابطه $v(t) = R.i(t)$ وجود دارد که R مقاومت الکتریکی عنصر مقاومتی است (به این رابطه، قانون اهم گفته می‌شود که بعداً در مورد آن صحبت بیشتری خواهیم نمود). اما بعضی از ارتباطات بین متغیرها، بستگی به نحوه اتصال عناصر یک مدار الکتریکی به یکدیگر دارد که اصطلاحاً به آن توپولوژی مدار^۳ می‌گویند. در این بخش، می‌خواهیم این نوع ارتباطات را که تحت عنوان قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف^۴ مشهور هستند، بیان کنیم.

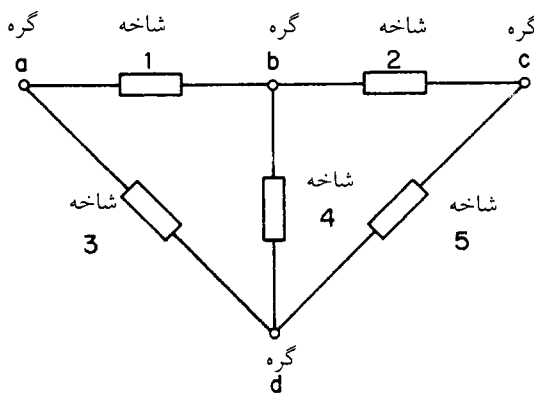
^۱ - Distributed Element

^۲ - Lumped Element

^۳ - Network Topology

^۴ - Kirchhoff's Current and Voltage Law

قبل از اینکه به بیان قوانین کیرشهف بپردازیم، باید مفاهیم گره، شاخه، و حلقه را بیان نماییم. نقطه‌ای از یک مدار الکتریکی که در آن، دو یا چند عنصر به هم متصل می‌شوند با نام گره^۱ شناخته می‌شود. همچنین به عناصر دو سری که در هر مدار الکتریکی به کار می‌روند، یک شاخه^۲ گفته می‌شود. بنابراین، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۳-۱) دارای ۴ گره با نام‌های a، b، c و d و دارای ۵ شاخه با شماره‌های ۱ تا ۵ می‌باشد. به گره a، دو شاخه ۱ و ۳ متصل شده است و این در حالی است که گره d با سه شاخه ۳، ۴ و ۵ در ارتباط است. حال مفهوم یک حلقه^۳ به این صورت بیان می‌شود: اگر در یک مسیر، از یک گره موردنظر شروع کرده و با عبور از شاخه‌های مدار الکتریکی، به همان گره اولیه برسیم. اصطلاحاً گفته می‌شود که یک حلقه ایجاد شده است. مسیر این حلقه از شاخه‌های مدار الکتریکی تشکیل شده است. به عنوان مثال، شاخه‌های ۱، ۴ و ۳ در شکل (۱۳-۱)، یک حلقه را تشکیل می‌دهند. همچنین شاخه‌های ۲، ۵ و ۴ حلقه دیگری را تشکیل داده و شاخه‌های ۱، ۲، ۵ و ۳ حلقه سوم را در مدار الکتریکی شکل مذکور تشکیل می‌دهند. پس در شکل (۱۳-۱)، ۴ گره، ۵ شاخه و ۳ حلقه وجود دارد. البته در فصل‌های آتی، با مفهوم دیگری به نام مش آشنا خواهیم شد که نوع خاصی از حلقه می‌باشد.



شکل (۱۳-۱): گره‌ها، شاخه‌ها و حلقه‌های یک مدار الکتریکی

اکنون آماده ایم که قوانین کیرشهف را بیان کنیم.

^۱ - Node

^۲ - Branch

^۳ - Loop

۱-۵-۱- قانون جریان کیرشهف

قانون جریان کیرشهف^۱ یا KCL: جمع جبری جریان‌های الکتریکی تمام شاخه‌های متصل شده به هر گره‌ای در هر لحظه از زمان، برابر صفر می‌باشد.

برای درک بهتر این قانون، گره b از شکل (۱۳-۱) را در نظر بگیرید که در شکل (۱۴-۱) نشان داده شده است. با توجه به حوزه عملکرد این قانون که برای هر گره می‌باشد، لذا نیازی به توجه به دیگر گره‌های شبکه وجود ندارد که در اینجا به صورت یک جعبه در نظر گرفته شده‌اند. در صورتی که جریان شاخه‌های ۱، ۲ و ۴ را به ترتیب با $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i_4(t)$ با جهت‌های مورد نظر مشخص نماییم آنگاه بر اساس قانون KCL می‌توان نوشت:

$$i_1(t) - i_4(t) + i_2(t) = 0 \quad (13-1)$$

که در این معادله، جریان‌های ورودی به گره را با علامت مثبت و جریان‌های خروجی را منفی در نظر گرفته ایم. اگر علامت مثبت را برای جریان‌های خروجی از گره، و علامت منفی را برای جریان‌های ورودی در نظر بگیریم، رابطه (۱۳-۱) به شکل زیر تغییر می‌کند:

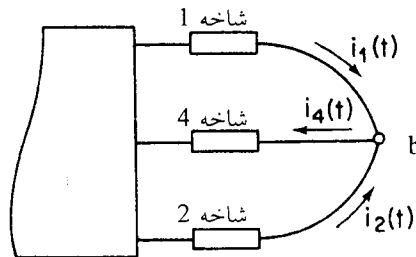
$$-i_1(t) + i_4(t) - i_2(t) = 0 \quad (14-1)$$

که با مقایسه دو رابطه اخیر در می‌یابیم که این دو رابطه دقیقاً مشابه یکدیگر هستند. به عنوان مثال، اگر،

$$i_1(t) = 1 - 3 \sin t \quad (A) \quad \text{و} \quad i_2(t) = 4 \sin 3t \quad (A)$$

آنگاه جریان $i_4(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i_4(t) = i_1(t) + i_2(t) = 1 - 3 \sin t + 4 \sin 3t$$



شکل (۱۴-۱): قانون KCL برای گره b از شکل (۱۳-۱)

^۱ - Kirchhoff's Current Law

با توجه به مطالب مذکور می‌توان قانون جریان کیرشهف را به شکل متداول بهتری نیز ارائه نمود:

بیان متداول قانون جریان کیرشهف: مجموع جریان‌های الکتریکی ورودی به هر گره از طریق شاخه‌های متصل به آن، برابر مجموع جریان‌های الکتریکی خروجی از آن گره، در هر لحظه از زمان می‌باشد

بر اساس بیان اخیر قانون جریان کیرشهف، این قانون را برای گره b در شکل (۱۴-۱) می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

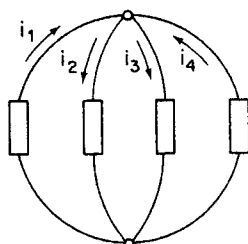
$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) \quad (15-1)$$

که این رابطه با روابط (۱۳-۱) و (۱۴-۱) هم ارز و معادل است. قانون KCL را می‌توان بر اساس بارهای الکتریکی نیز بیان نمود. با توجه به آنکه در هر گره، هیچ بار الکتریکی، ذخیره، تولید، یا از بین نمی‌رود، لذا مجموع بارهای الکتریکی ورودی و خروجی از هر گره با هم برابرند. این مطلب را می‌توان با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۵-۱) نیز بدست آورد.

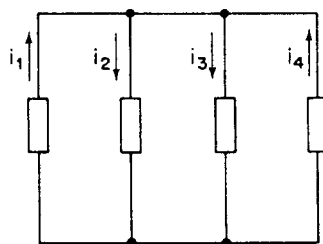
$$\int i_1(t)dt + \int i_2(t)dt = \int i_3(t)dt$$

$$q_1(t) + q_2(t) = q_3(t) \quad (16-1)$$

بعضی مواقع در ترسیم توپولوژی شبکه‌ها و مدارهای الکتریکی مسایلی پیش می‌آید که باعث اشتباه در تعیین گره‌های آن مدار می‌شود. این حالت، زمانی رخ می‌دهد که یک گره مطابق با شکل (۱۵-۱-الف) به صورت دو نقطه اتصال جدا از هم که با یک هادی (با مقاومت صفر) به هم متصل شده‌اند، نشان داده شود که این موضوع در شکل (۱۵-۱-ب) ارائه شده است. در این حالت، یک گره (یا یک نقطه مشترک) به یک خط مشترک تبدیل شده است. پس باید تمام سیم‌های رابط هادی یا قسمتی از سیم‌های رابط که به یک گره



(الف)



(ب)

شکل (۱۵-۱): شکل‌های متداول در نمایش گره‌ها؛ (الف) نقطه مشترک؛ (ب) خط مشترک

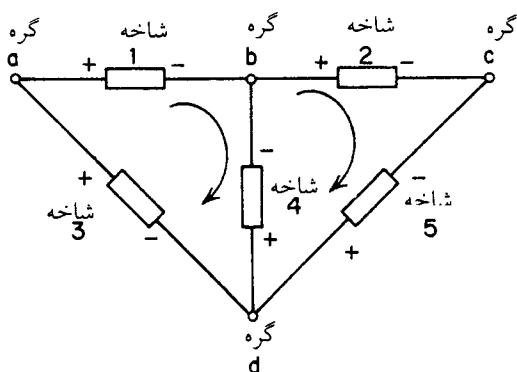
متصل شده اند را به عنوان یک گره در نظر گرفت. به عبارت دیگر، هنوز مدار (۱-۱۵-ب) دارای یک گره بالایی و یک گره پایینی می باشد.

۱-۵-۲- قانون ولتاژ کیرشهف

دومین قانون کیرشهف، قانون ولتاژ آن^۱ یا KVL می باشد. این قانون، در ارتباط با حلقه های ایجاد شده در هر مدار الکتریکی می باشد و به شکل زیر بیان می شود:

قانون KVL: جمع جبری ولتاژ تمام شاخه های هر حلقه در هر لحظه از زمان، برابر صفر می باشد.

برای درک بهتر این قانون، یک مدار الکتریکی مطابق شکل (۱-۱۶) را در نظر بگیرید که همان مدار شکل (۱-۱۳) می باشد؛ با این تفاوت که بدون توجه به جریان های عبوری از شاخه ها، ولتاژهای الکتریکی دو سر هر عنصر مشخص شده است. قبلاً گفتیم که این مدار، شامل سه حلقه می باشد که حلقه اول از شاخه های ۱، ۴ و ۳، حلقه دوم از شاخه های ۲، ۵ و ۴ و حلقه سوم از شاخه های ۱، ۲، ۵ و ۴ تشکیل شده است.



شکل (۱-۱۶): نمایش حلقه ها و ولتاژهای هر شاخه حلقه های یک مدار الکتریکی

حال بر اساس قانون KVL، رابطه ولتاژها را برای سه حلقه به صورت زیر می توان نوشت:

$$\text{حلقه ۱: } -v_3(t) + v_1(t) - v_4(t) = 0 \quad (17-1)$$

$$\text{حلقه ۲: } v_4(t) + v_2(t) - v_5(t) = 0 \quad (18-1)$$

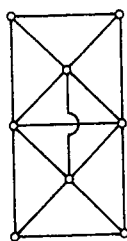
$$\text{حلقه ۳: } v_1(t) + v_2(t) - v_5(t) - v_3(t) = 0 \quad (19-1)$$

^۱ - Kirchhoff's Voltage Law

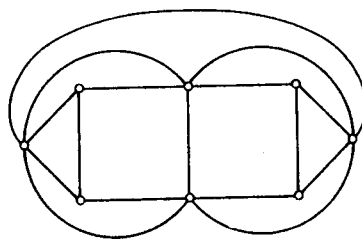
البته برای نوشتن قانون KVL در هر حلقه، در صورتی که در جهت حلقه (جهت فلش در شکل ۱-۱۶) حرکت کنیم و از سر منفی یک عنصر وارد شویم، بر اساس قاعده، ولتاژ را با علامت منفی برای آن در نظر می‌گیریم و اگر از سر مثبت وارد شویم، ولتاژ آن عنصر را با علامت مثبت فرض می‌کنیم. البته این موضوع، یک قرارداد اختیاری است که به صورت یک قاعده متداول در آمده است و اگر خلاف این روش را هم اختیار کنیم، هیچ خللی در تحلیل قانون ایجاد نمی‌کند. به عبارت دیگر، اگر بر خلاف قاعده متداول عمل کنیم، مثل آن است که روابط (۱-۱۷) تا (۱-۱۹) را در یک علامت منفی ضرب کرده باشیم که خللی در محاسبات ایجاد نمی‌کند.

۱-۶- شبکه‌های مسطح و غیرمسطح

آخرین دسته‌بندی از مدارها، شبکه‌های مسطح^۱ و غیرمسطح^۲ می‌باشد. مسطح بودن یک شبکه به آن معنا است که می‌توان مدار الکتریکی را به گونه‌ای ترسیم نمود که هیچ یک از عناصر مدار، یکدیگر را قطع نکنند. به عنوان مثال در شبکه (۱-۱۷-الف) یک عنصر مدار بر روی عنصر دیگر مدار قرار گرفته و به عبارت دیگر، گراف روی صفحه این مدار، ظاهراً به شکل غیرمسطح است؛ ولی با اصلاح نمایش مدار، می‌توان این اشکال نمایش را بر طرف نمود که در شکل (۱-۱۷-ب)، گراف مسطح نمایش داده شده است. اما بعضی از مدارهای الکتریکی را نمی‌توان به هیچ وجه به صورت یک شبکه مسطح نمایش داد که به عنوان نمونه، می‌توان شکل (۱-۱۸) را مشاهده نمود. به عبارت دیگر، گراف مدار ارائه شده در شکل مذکور را نمی‌توان به گونه‌ای ترسیم نمود که هیچ یک از شاخه‌ها بر روی شاخه‌های دیگری قرار نگیرند. به این نوع شبکه‌ها، شبکه‌های غیرمسطح می‌گویند.



(الف)

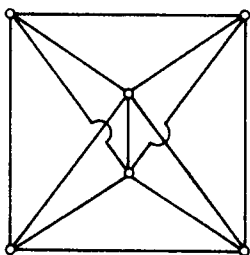


(ب)

شکل (۱-۱۷): یک شبکه مسطح

^۱ - Planar Graph

^۲ - Non-Planar Graph

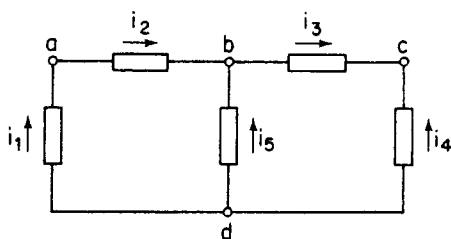


شکل (۱-۱۸): یک شبکه غیرمسطح

تمرین (۱-۲): شکل (۱-۱۹) یک مدار الکتریکی نمونه را نشان می‌دهد. در این مدار:
الف) مطلوبست معادلات KCL برای گره‌های a، b، c و d؛ ب) مطلوبست معادلات KVL برای سه حلقه موجود مدار.

$$\left. \begin{aligned} v_1 + v_2 - v_5 &= 0 \\ v_5 + v_3 - v_4 &= 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 - v_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{معادلات KVL}$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 \\ i_2 + i_5 &= i_3 \\ i_3 + i_4 &= 0 \\ i_1 + i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{جواب: معادلات KCL}$$



شکل (۱-۱۹): شبکه الکتریکی نمونه

۷-۱- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل، ابتدا متغیرهای یک مدار الکتریکی به همراه واحدهای اندازه‌گیری آنان ارائه گردید. سپس جهت‌های مناسب هر یک از این متغیرها مطرح شد و در نهایت، قوانین اساسی کیرشهف بیان گردید. از مباحث این فصل می‌توان نتیجه گرفت که:

- مدارهای الکتریکی به حالت‌های مختلف زیر دسته بندی می‌شوند: خطی بودن در مقابل غیرخطی بودن، تغییرناپذیر با زمان در مقابل تغییرپذیر با زمان، مدارهای فشرده در مقابل

مدارهای گسترده، مدارهای اکتیو در مقابل مدارهای پسیو. در این کتاب، مدارهای از نوع خطی، تغییرناپذیر با زمان، و مدارهای فشرده با خاصیت پسیو مد نظر می‌باشد.

• قانون KCL بیان می‌کند که در هر لحظه از زمان، جمع جبری جریان‌های ورودی به هر گره، برابر صفر است. به عبارت دیگر،

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0$$

که در این رابطه، N تعداد شاخه‌های متصل به گره موردنظر و $i_n(t)$ جریان هر شاخه متصل به گره مربوطه می‌باشد.

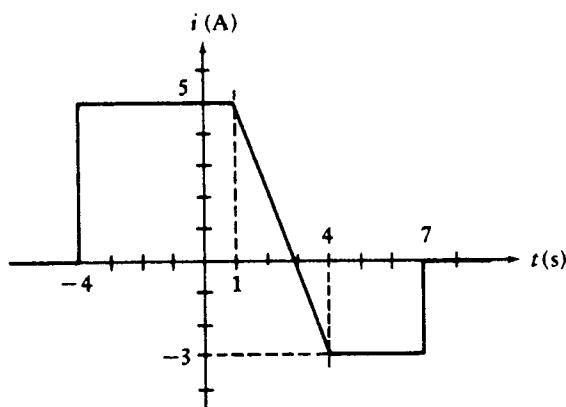
• قانون KVL بیان می‌دارد که در هر لحظه از زمان، جمع جبری ولتاژهای هر حلقه، برابر صفر است؛ یعنی:

$$\sum_{m=1}^M v_m(t) = 0$$

که در این رابطه، M تعداد کل شاخه‌های هر حلقه موردنظر و $v_m(t)$ ولتاژ هر شاخه در حلقه مربوطه می‌باشد.

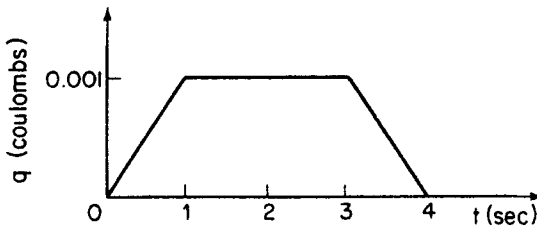
۸-۱- مسائل مروری

۱- منحنی تغییرات جریان الکتریکی یک عنصری را به صورت شکل (۸-۱-۲۰) در نظر بگیرید. کل بار عبوری از این عنصر را بیابید.



شکل (۸-۱-۲۰): تغییرات جریان یک عنصر

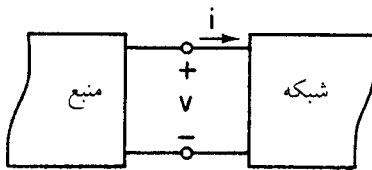
۲- تغییرات بار الکتریکی عبوری از یک عنصر دو سر از یک شبکه الکتریکی به صورت شکل (۲۱-۱) می باشد: الف) شکل موج جریان عبوری از این عنصر را بیابید. ب) با استفاده از جریان عبوری قسمت (الف)، آیا می توان شکل بار الکتریکی عبوری را متفاوت از شکل (۲۱-۱) به دست آورد؛ به گونه ای که جریان عبوری از عنصر، همان شکل موج محاسبه شده در قسمت (الف) باشد؟



شکل (۲۱-۱): تغییرات بار یک عنصر

۳- شبکه ای مطابق با شکل (۲۲-۱) از طریق دو ترمینال به یک منبع، متصل شده است. فرض کنید که شبکه موردنظر، بدون انرژی اولیه باشد. حال اگر در مدت زمان $0 \leq t \leq 3 \text{ msec}$ ، ولتاژ دو سر ترمینال شبکه به صورت $v(t) = 10 - 200t$ و جریان آن به صورت $i(t) = 10t^2 \text{ (mA)}$ تغییر کند، آنگاه مطلوبست محاسبه:

الف) نحوه تغییرات قدرت انتقالی $p(t)$ از منبع به شبکه موردنظر؛ ب) انرژی ارسالی $w(t)$ به سمت شبکه؛ ج) کل انرژی ذخیره شده در مدت 3 msec در شبکه.



شکل (۲۲-۱): اتصال یک شبکه به منبع الکتریکی

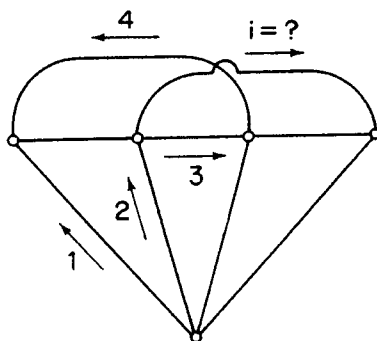
۴- در شبکه ارائه شده در شکل (۱۹-۱)، موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) در صورتی که $i_2(t) = 3 + 2t$ و $i_3(t) = 3 + \sin t$ باشد، جریان های $i_1(t)$ ، $i_4(t)$ ، و $i_5(t)$ را بیابید؛

ب) سه معادله KVL ارائه شده در شکل مذکور را با یکدیگر جمع کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

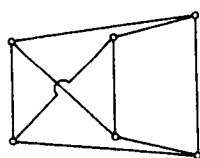
ج) در شکل مذکور، اگر $v_1(t) = 2 + 7t$ ، $v_4(t) = -4 + \sin t$ ، $v_5(t) = 3 + e^{-t}$ باشد مطلوبست محاسبه $v_2(t)$ ، $v_3(t)$.

۵- شبکه‌ای دارای گراف به صورت شکل (۲۳-۱) می‌باشد. در این شبکه، جهت و مقدار جریان ۴ شاخه، مشخص شده است. جریان شاخه موردنظر را تعیین کنید.

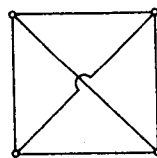


شکل (۲۳-۱): گراف یک شبکه الکتریکی نمونه

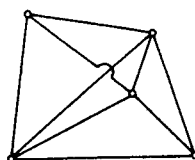
۶- کدام یک از گراف‌های ارائه شده در شکل (۲۴-۱) را می‌توان به صورت یک گراف مسطح رسم نمود. این گراف‌ها را رسم کنید.



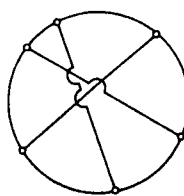
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل (۲۴-۱): چند گراف نمونه

فصل دوم

منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی

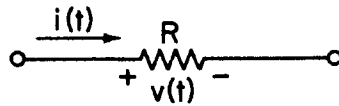
۲-۱- مقدمه

از عناصر مهم و اساسی در مدارهای الکتریکی می‌توان به منابع الکتریکی و مقاومت‌ها اشاره نمود. این منابع به دو نوع منابع جریان و ولتاژ تقسیم می‌شوند که در این فصل به آنها اشاره خواهیم نمود. همچنین با اتصال این منابع الکتریکی به مقاومت‌ها می‌توانیم مدارهای الکتریکی ساده‌ای را ایجاد نماییم. لذا این منابع و مقاومت‌ها را می‌توان به عنوان اجزاء مدار قلم‌داد نمود. در فصل چهارم، با دو نوع دیگر از عناصر مدار آشنا خواهیم شد که با نام‌های سلف و خازن مشخص می‌شوند. به این عناصر، عناصر دو سر می‌گویند. همچنین با خواص ساده‌سازی مدارها از قبیل سری و موازی شدن مقاومت‌ها آشنا خواهیم شد. در فصول بعدی با تکمیل شدن عناصر مدارها، تحلیل جامع‌تری از این مدارها به روش‌های مختلف بیان می‌شود.

۲-۲- مقاومت‌های الکتریکی

یکی از اساسی‌ترین عناصر در هر مدار الکتریکی، مقاومت‌ها می‌باشند که نمایش این عنصر مطابق با شکل (۲-۱) می‌باشد. با توجه به آنکه عناصر موردنظر در این کتاب، از نوع خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشند لذا ارتباط بین متغیرهای ولتاژ دو سر مقاومت و جریان عبوری از آن را به صورت خطی و بر اساس معادله زیر در نظر می‌گیریم:

$$v(t) = R.i(t) \quad \text{یا} \quad i(t) = G.v(t) \quad (۲-۱)$$

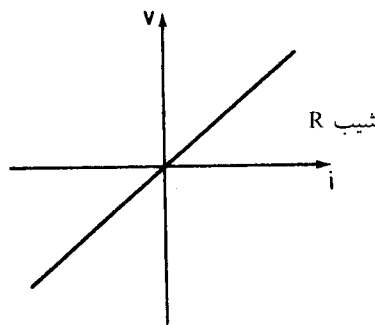


شکل (۱-۲): نمایش عنصر مقاومت با ولتاژ و جریان آن

که در این رابطه داریم:

$$G = \frac{1}{R} \quad (۲-۲)$$

به مقدار R ، مقاومت الکتریکی^۱ و به G رسانایی^۲ می‌گویند. این رابطه حاکم بر عنصر مقاومت را می‌توان به صورت مشخصه $v-i$ در شکل (۲-۲) نیز مشاهده نمود. این مقاومت، مستقل از زمان و جریان اعمالی است. به عبارت دیگر این مقاومت بیان می‌کند که با ولتاژ اعمالی $v(t)$ به آن، چه جریانی از مقاومت عبور می‌کند. واحد این مقاومت را اهم^۳ می‌نامیم و با Ω نشان می‌دهیم. با استفاده از رابطه (۱-۲) در می‌یابیم که 1Ω معرف مقدار یک ولت بر یک آمپر (یا $1V/1A$) می‌باشد. لازم به ذکر است که در بسیاری مواقع، به جای استفاده از مقاومت، از متغیر رسانایی G استفاده می‌شود که واحد آن مهو^۴ بوده و با $\mathcal{U}=1/\Omega$ نشان می‌دهیم.



شکل (۲-۲): مشخصه یک مقاومت خطی

بر اساس مطالب ارائه شده در فصل اول، و بر اساس رابطه (۱-۲)، توان تلف شده در این مقاومت به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$p(t) = v(t).i(t) = (R.i(t)).i(t) = R.i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (W) \quad (۳-۲)$$

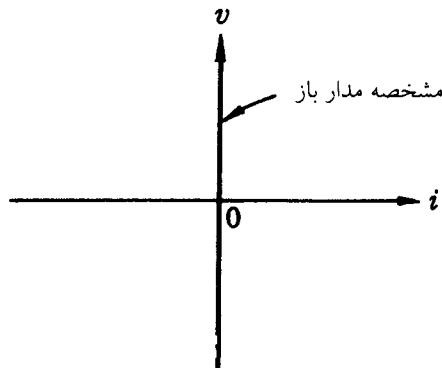
^۱ - Resistance

^۲ - Conductance

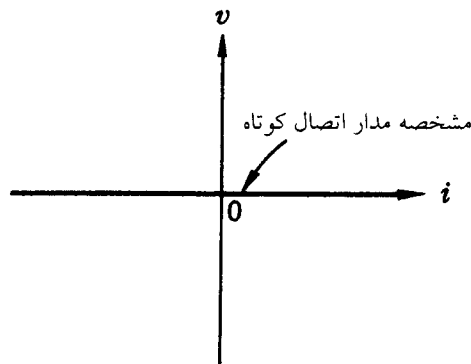
^۳ - Ohm

^۴ - Mho

دو نمونه کاربردی از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، عنصر مدار باز^۱ و عنصر مدار اتصال کوتاه^۲ می‌باشند. یک عنصر دو سر را مدار باز می‌گویند، اگر به‌ازای همه ولتاژهای دو سر عنصر، جریان عبوری از آن برابر صفر باشد. مشخصه $v-i$ این عنصر را می‌توان در شکل (۳-۲) مشاهده نمود. بر اساس این شکل، مشخصه $v-i$ دارای یک شیب بینهایت است یا به عبارت دیگر، $R = \infty$ یا $G = 0$ می‌باشد. از طرف دیگر، یک عنصر دو سر را مدار اتصال کوتاه می‌گویند، هر گاه ولتاژ دو سر آن با عبور جریان دلخواه از آن، برابر صفر باشد. مشخصه $v-i$ این عنصر را می‌توان در شکل (۴-۲) مشاهده نمود که دارای شیب صفر می‌باشد؛ یعنی، $R = 0$ یا $G = \infty$ خواهد بود.



شکل (۳-۲): مشخصه $v-i$ یک عنصر مدار باز



شکل (۴-۲): مشخصه $v-i$ یک عنصر مدار اتصال کوتاه

^۱- Open Circuit

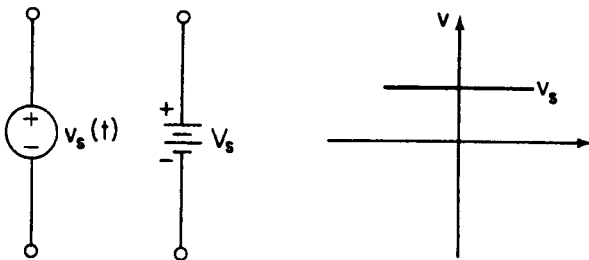
^۲- Short Circuit

۲-۳- منابع الکتریکی

منابع الکتریکی در هر مداری، عناصری هستند که انرژی الکتریکی را تولید می‌کنند تا در عناصر دیگر مدار، از جمله مقاومت‌ها مصرف شوند تا اصل بقای انرژی برقرار گردد. این منابع الکتریکی به دو نوع منابع الکتریکی مستقل^۱ و وابسته^۲ تقسیم می‌شوند که در این بخش به آنها اشاره خواهیم کرد.

۲-۳-۱- منابع الکتریکی مستقل

منابع الکتریکی مستقل به منابعی گفته می‌شوند که مقدار ولتاژ یا جریان تولیدی منبع، مستقل از بار اتصال یافته به منبع می‌باشد. این منابع الکتریکی مستقل به دو نوع منابع ولتاژ و جریان تقسیم‌بندی می‌شوند که نمایش منابع ولتاژی به همراه مشخصه تولیدی آن در شکل (۵-۲) نشان داده شده است. همان‌گونه که از مشخصه آن نیز پیداست، این منابع ولتاژ، تحت هر جریانی که از آن عبور می‌کند، دارای ولتاژی به مقدار $v_s(t)$ است. البته اگر ولتاژ $v_s(t)$ بر حسب زمان تغییر کند، مثلاً یک تابع سینوسی باشد، مفهوم ثابت بودن ولتاژ منبع و وابسته نبودن به جریان عبوری از آن به این معنا است که $v_s(t)$ دائماً و تحت هر نوع بار متصل به آن، شکل ثابت (مثلاً سینوسی بودن) منحنی ولتاژ تولیدی را خواهد داشت. به عبارت دیگر، مقاومت داخلی این منبع ولتاژ، برابر صفر فرض می‌شود. لذا به این منبع ولتاژ، منبع ولتاژ ایده‌آل نیز می‌گویند.



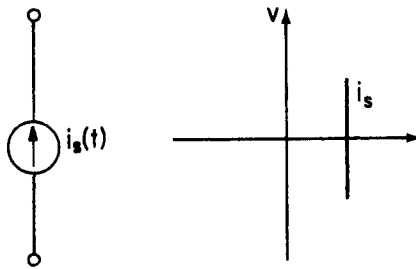
شکل (۵-۲): منبع الکتریکی ولتاژی مستقل و مشخصه آن

این مطالب را می‌توان در مورد منابع جریان مستقل نیز بیان نمود. منبع جریان ایده‌آل و مستقل به این معنی است که جریان تولیدی این منبع، مستقل از بار اتصالی به آن بوده و

^۱ - Independent Sources

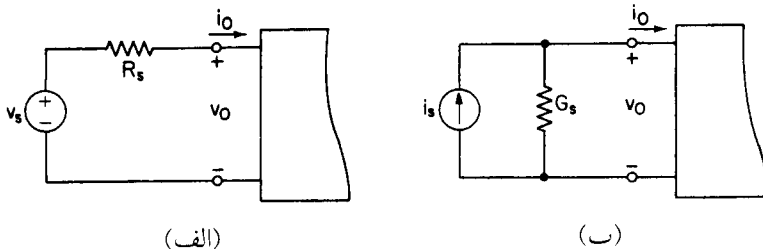
^۲ - Dependent Sources

مقدار آن همیشه برابر مقدار ثابت $i_s(t)$ است. نحوه نمایش این منبع ایده‌آل به همراه مشخصه آن در شکل (۶-۲) آمده است.



شکل (۶-۲): منبع الکتریکی جریانی مستقل و مشخصه آن

در مدارهای الکتریکی واقعی، به هیچ وجه نمی‌توان منابع الکتریکی ایده‌آل را ایجاد نمود. به عبارت دیگر، هیچ منبع ولتاژی را نمی‌توان یافت که ولتاژ دو سر آن با تغییر بار اتصالی به آن، ثابت باشد. یعنی برای هر منبع واقعی ولتاژی، باید یک مقاومت داخلی با منبع ولتاژی $v_s(t)$ در نظر گرفت که این مقاومت، معمولاً مقدار بسیار کوچکی می‌باشد. این موضوع در شکل (۷-۲-الف) نشان داده شده است. همین موضوع را می‌توان برای منابع واقعی جریان نیز بیان نمود. به عبارت دیگر در عمل، هیچ منبع جریانی را نمی‌توان یافت که با تغییر بار الکتریکی متصل به آن، جریان تولیدی آن نیز ثابت باشد. برای نمایش نحوه تغییرات جریان تولیدی توسط منبع واقعی جریان، از یک مقاومت موازی با منبع استفاده می‌شود که با تغییر بار، مقدار جریان عبوری از آن نیز تغییر می‌کند. در شکل (۷-۲-ب) یک منبع واقعی جریان نشان داده شده است.



شکل (۷-۲): منابع مستقل واقعی؛ (الف) منبع ولتاژ، (ب) منبع جریان

برای تعیین مشخصه $v-i$ در یک منبع واقعی ولتاژی کافی است که قانون KVL را برای شکل (۷-۲-الف) بیان کنیم که،

$$v_o(t) = v_s(t) - R_s \cdot i_o(t)$$

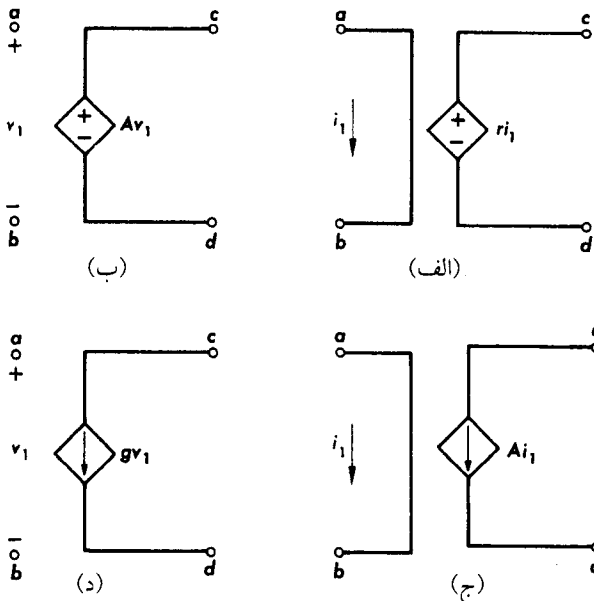
این رابطه نشان می‌دهد که با افزایش جریان بار متصل شده به منبع، ولتاژ دو سر بار (که همان ولتاژ خروجی منبع واقعی ولتاژی است) افزایش می‌یابد. همچنین با استفاده از قانون KCL برای مدار ارائه شده در شکل (۲-۷-ب) داریم:

$$i_o(t) = i_s(t) - G_s \cdot v_o(t)$$

از این رابطه درمی‌یابیم در صورتی که ولتاژ دو سر بار کاهش یابد، جریان تزریقی به بار (که همان جریان خروجی از منبع واقعی جریان است) کاهش می‌یابد.

۲-۳-۲- منابع الکتریکی وابسته

دسته دیگری از منابع الکتریکی که در مدارها به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند، منابع الکتریکی وابسته می‌باشند. خصوصیات اصلی این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان به جریان یا ولتاژ عنصر دیگری از مدار، وابسته می‌باشند. به همین خاطر، نام دیگر این منابع وابسته را منابع کنترل شونده نیز می‌گویند. شکل (۲-۸) چهار نوع این منابع را نشان می‌دهد. عناصر قرار گرفته در سرهای a و b، بیانگر متغیر کنترل کننده می‌باشند و عناصر قرار گرفته در سرهای c و d، نشان دهنده متغیر کنترل شونده (که ولتاژ یا جریان خروجی



شکل (۲-۸): چهار نوع منبع الکتریکی وابسته

منبع است) می‌باشد. بر این اساس، شکل‌های (الف و ب) بترتیب منبع ولتاژی وابسته به جریان و منبع ولتاژی وابسته به ولتاژ را نشان می‌دهد. همچنین در شکل‌های (ج و د) بترتیب منبع جریانی وابسته به جریان و منبع جریانی وابسته به ولتاژ مشخص شده است. لازم به ذکر است که این نوع منابع، به صورت منابع وابسته ایده‌آل می‌باشند. برای مشخص شدن نحوه عملکرد این نوع منابع، یکی از آنها را بررسی می‌کنیم. به عنوان نمونه در شکل (۲-۸-الف) اگر جریان عنصر موردنظر (که همان $i_1(t)$ است) تغییر کند، آنگاه ولتاژ منبع وابسته به مقدار i_2 برابر جریان $i_1(t)$ (یعنی $i_2(t)$) تغییر می‌کند. این موضوع را می‌توان برای شکل‌های (ب) تا (د) نیز به شکل مناسب بیان نمود.

۲-۴- مدار معادل تونن و نورتن

در بخش (۲-۳-۱) مدل واقعی منابع الکتریکی مستقل جریانی و ولتاژی را ارائه نمودیم. در مدارهای الکتریکی، این منابع الکتریکی را می‌توان برحسب نوع دیگر آن، معادل‌سازی نمود. به عبارت دیگر هر کدام از منابع ارائه شده در شکل (۲-۷) را می‌توان به نوع دیگر آن تبدیل نمود. این معادل‌سازی با استفاده از روابط ارائه شده برای هر کدام از منابع مستقل واقعی امکان‌پذیر خواهد بود. به عنوان مثال برای یک منبع واقعی ولتاژ و جریان در شکل (۲-۷) داشتیم:

$$(۲-۶) \quad v_o(t) = v_s(t) - R_s \cdot i_o(t) \quad \text{منبع ولتاژ}$$

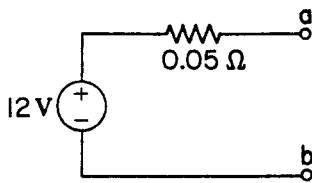
$$(۲-۷) \quad i_o(t) = i_s(t) - G_s \cdot v_o(t) \quad \text{منبع جریان}$$

از مقایسه این دو معادله درمی‌یابیم که برای معادل‌سازی یک منبع جریان با معادله (۲-۷) به یک منبع ولتاژ با معادله (۲-۶) باید شرایط زیر برقرار گردد:

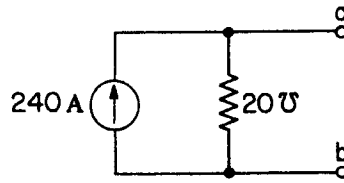
$$v_s(t) = \frac{i_s(t)}{G_s} = R_s \cdot i_s(t)$$

به عبارت دیگر، موازی بودن یک منبع جریان ایده‌آل $i_s(t)$ با مقاومت R_s تبدیل به یک منبع ولتاژ واقعی با ولتاژ ایده‌آل $v_s(t) = R_s \cdot i_s(t)$ می‌شود که با مقاومت R_s سری شده باشد. به مدل منبع الکتریکی به صورت منبع جریان موازی شده با مقاومت، مدار معادل نورتن می‌گویند و به مدل منبع به صورت منبع ولتاژ سری شده با مقاومت، مدار معادل تونن می‌گویند. این موضوع را به طور مفصل‌تر در فصل‌های بعدی بحث می‌کنیم.

مثال (۲-۱): در صورتی که یک منبع الکتریکی با مدل ارائه شده در شکل (۲-۹-الف) بر اساس مدار معادل تونن باشد، مدار معادل نورتن آن را بیابید.



(الف)



(ب)

شکل (۹-۲): (الف) مدار معادل تونن؛ (ب) مدار معادل نورتن

حل: برای تعیین منبع جریان معادل با شکل (۹-۲-الف) خواهیم داشت:

$$i_s(t) = \frac{v_s(t)}{R_s} = \frac{12}{0.05} = 240 \text{ A}$$

که این منبع جریان با یک مقاومت الکتریکی با رسانایی 20 S موازی می‌شود
 $(G_s = 20 \text{ S})$.

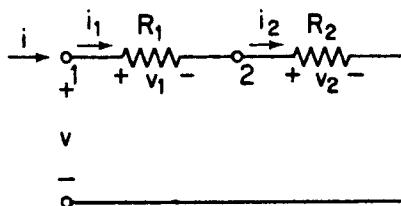
۲-۵- مفاهیم سری و موازی مقاومتها و ساده سازی آنان

در این بخش می‌خواهیم اتصالات سری و موازی مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار داده و این نوع مدارها را ساده‌سازی کنیم.

۲-۵-۱- اتصال سری مقاومت‌ها

شکل (۱۰-۲) اتصال سری دو مقاومت R_1 و R_2 را نشان می‌دهد. مفهوم سری بودن دو مقاومت به این معنا است که جریان عبوری از هر دو مقاومت، با هم مساوی باشند. این موضوع را می‌توان با استفاده از قانون KCL برای هر دو گره ۱ و ۲ نیز نشان داد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) \quad (9-2)$$



شکل (۱۰-۲): اتصال سری دو مقاومت

همچنین با استفاده از قانون KVL خواهیم داشت:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (۱۰-۲)$$

حال با توجه به تعریف رابطه $v-i$ در دو سر هر مقاومت و با استفاده از رابطه (۱-۲) برای هر یک از مقاومت‌ها روابط زیر را داریم:

$$v_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) \quad (۱۱-۲)$$

$$v_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad (۱۲-۲)$$

اکنون با جایگذاری دو رابطه اخیر در معادله (۱۰-۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$v(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t)$$

$$v(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t) \quad (۱۳-۲)$$

حال اگر بخواهیم به جای مقاومت‌های R_1 و R_2 ، یک مقاومت معادل R_{eq} قرار دهیم که مشخصه $v-i$ مدار (که همان ارتباط بین $v(t)$ و $i(t)$ است) تغییری نکند باید رابطه زیر صادق باشد:

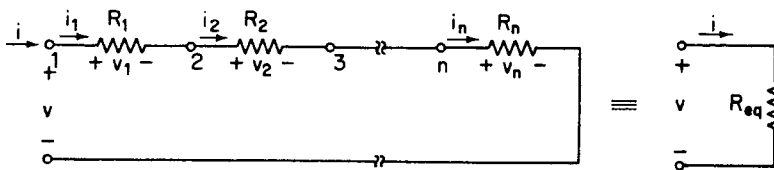
$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (۱۴-۲)$$

این مطالب را می‌توان برای اتصال سری n مقاومت نیز بیان نمود که در شکل (۱۱-۲) نشان داده شده است. با استفاده از قانون KCL برای n گره ۱ تا n خواهیم داشت:

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t) \quad (۱۵-۲)$$

همچنین با استفاده از قانون KVL داریم:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \quad (۱۶-۲)$$



شکل (۱۱-۲): اتصال سری n مقاومت

حال با توجه به آنکه رابطه زیر برای هر مقاومت را داریم:

$$v_i(t) = R_i \cdot i_i(t) = R_i \cdot i(t) \quad (۱۷-۲)$$

در نتیجه با جایگذاری در رابطه (۱۶-۲) خواهیم داشت:

$$v(t) = \sum_{i=1}^n R_i \cdot i_i(t) = i(t) \sum_{i=1}^n R_i \quad (۱۸-۲)$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم که n مقاومت سری دارای مقاومت معادلی به صورت زیر خواهد بود:

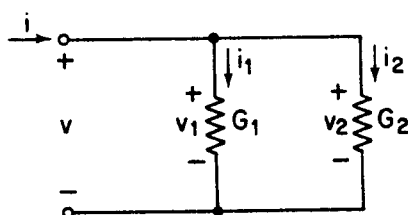
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (19-2)$$

با جایگذاری مقاومت معادل R_{eq} به جای مقاومت‌های R_1 تا R_n ، مشخصه $v-i$ مدار در هر دو حالت شکل (۱۱-۲) با یکدیگر مساوی خواهد بود.

۲-۵-۲- اتصال موازی مقاومت‌ها

مشابه بخش (۲-۵-۱)، این بار اتصال موازی مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل (۱۲-۲) اتصال موازی دو مقاومت با رسانایی G_1 و G_2 (یا با مقاومت‌های $R_1 = 1/G_1$ و $R_2 = 1/G_2$) را نشان می‌دهد. مفهوم موازی بودن این دو مقاومت به این معنی است که ولتاژ دو سر آنها در هر لحظه با هم مساوی و به مقدار یکسان $v(t)$ خواهد بود. یعنی،

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) \quad (20-2)$$



شکل (۱۲-۲): اتصال موازی دو مقاومت

حال به دنبال آن هستیم که به جای این دو مقاومت، مقاومت معادلی قرار دهیم که همان مشخصه $v-i$ مدار را داشته باشد. بدین منظور با استفاده از قانون KCL در گره مدار خواهیم داشت:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (21-2)$$

با توجه به آنکه برای دو مقاومت مدار روابط زیر حاکم است:

$$i_1(t) = G_1 \cdot v_1(t) \quad (22-2)$$

$$i_2(t) = G_2 \cdot v_2(t) \quad (23-2)$$

لذا با استفاده از دو معادله اخیر در معادله (۲۱-۲) به دست می‌آوریم که:

$$i(t) = G_1 \cdot v_1(t) + G_2 \cdot v_2(t) = (G_1 + G_2) \cdot v(t) \quad (24-2)$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (2-25)$$

این معادل‌سازی را می‌توان برای موازی بودن n مقاومت مطابق با شکل (۲-۱۳) هم انجام داد. مشابه حالت دو مقاومت موازی با استفاده از قوانین KVL و KCL داریم:

$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) = \dots = v_n(t) \quad (2-26)$$

$$i(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) \quad (2-27)$$

با توجه به آنکه برای هر مقاومت، $i_i(t) = G_i \cdot v(t)$ را داریم، لذا با جایگذاری در معادله (۲-۲۷) می‌توان نوشت:

$$i(t) = v(t) \sum_{i=1}^n G_i \quad (2-28)$$

در نهایت با تعریف:

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i \quad (2-29)$$

مشخصه $v-i$ نهایی سیستم برابر است با:

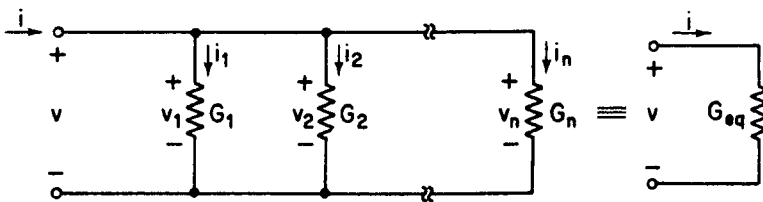
$$i(t) = G_{eq} \cdot v(t) \quad (2-30)$$

رابطه (۲-۲۹) را می‌توان بر اساس مقاومت عناصر نیز به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (2-31)$$

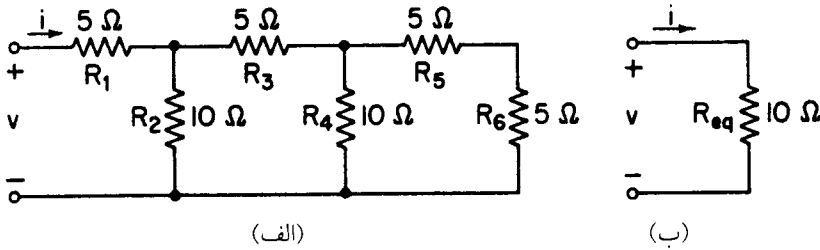
که این رابطه برای دو مقاومت موازی به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2-32)$$



شکل (۲-۱۳): اتصال موازی n مقاومت

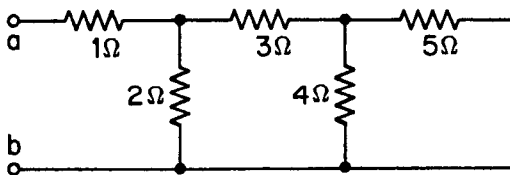
مثال (۲-۲): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۱۴-الف) مورد نظر است. با استفاده از خواص سری و موازی مقاومت‌ها، مقاومت معادل را بیابید.



شکل (۲-۱۴): الف) مدار الکتریکی سری و موازی؛ ب) مدار الکتریکی معادل

حل: ابتدا مقاومت‌های R_5 با R_6 سری هستند که برآیند آنها برابر 10Ω می‌شود. سپس این مقاومت با مقاومت $R_4 = 10\Omega$ موازی می‌شود که برآیند آنها 5Ω خواهد شد. این روند را تا دو سر مدار ادامه می‌دهیم تا در نهایت به مقاومت معادل $R_{eq} = 10\Omega$ می‌رسیم که در شکل (۲-۱۴) ب) نشان داده شده است.

تمرین (۲-۱): مقاومت معادل مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۱۵) را بیابید.



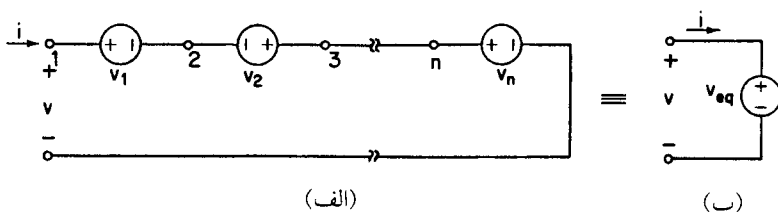
شکل (۲-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۱)

جواب: $R_{eq} = 159/60\Omega \cong 2/45\Omega$

۲-۶- مفاهیم سری و موازی منابع الکتریکی

در این بخش می‌خواهیم نحوه معادل‌سازی سری و موازی منابع ولتاژ و جریان را بیان نماییم. مشابه شکل (۲-۱۶) فرض کنید که n منبع ولتاژی با مقادیر v_1 تا v_n با هم سری شده باشند؛ به این معنی که جریان عبوری از تمام منابع، یکسان است. حال با استفاده از قانون KVL به این نتیجه می‌رسیم که برای معادل‌سازی این n منبع با یک منبع معادل با ولتاژ $v_{eq}(t)$ خواهیم داشت:

$$v_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \quad (2-32)$$

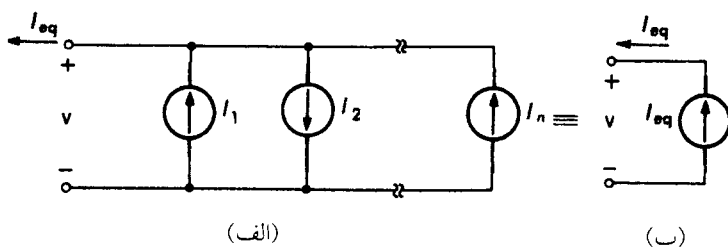


شکل (۲-۱۶): الف) اتصال سری n منبع ولتاژ؛ ب) منبع ولتاژ معادل

لازم به ذکر است که اپراتور $\sum$ به معنای جمع جبری است و در صورتی که در یک نقطه از اتصال منابع، پلاریته‌های (قطب‌های) همنام به هم وصل شوند، باید ولتاژ دو منبع متوالی مورد نظر از هم کم شوند. این موضوع را می‌توان برای موازی بودن n منبع جریان نیز ارائه نمود. بدین منظور شکل (۲-۱۷) را در نظر بگیرید که با استفاده از قانون KCL و به منظور معادل‌سازی این n منبع با یک منبع جریان $I_{eq}(t)$ خواهیم داشت:

$$I_{eq}(t) = \sum_{i=1}^n I_i(t) = I_1(t) - I_2(t) + \dots + I_n(t) \quad (2-33)$$

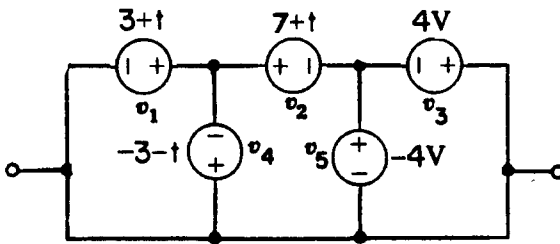
لازم به ذکر است در صورتی که n منبع ایده‌آل ولتاژی به طور موازی با هم قرار گیرند حتماً باید ولتاژ آنان با هم مساوی باشند و در نتیجه، منبع ولتاژ معادل این n منبع، یک منبع ولتاژ با مقدار مساوی و مشابه n منبع خواهد بود. در غیر این صورت، اتصال موازی n منبع ایده‌آل ولتاژی با مقادیر مختلف ولتاژی و اتصال سری n منبع ایده‌آل جریانی با جریان‌های متفاوت تعریف نشده است.



شکل (۲-۱۷): الف) اتصال موازی n منبع جریان؛ ب) منبع جریان معادل

مثال (۲-۳): در شکل (۲-۱۸). اتصال پنج منبع ولتاژی را با هم نشان می‌دهد. منبع ولتاژ معادل را بیابید.

حل: برای یافتن منبع معادل ولتاژی، باید قانون KVL را برای یک مسیر دلخواه بین نقاط ابتدا و انتهای مدار بنویسیم. بدین منظور اگر قانون KVL را از طریق منابع ۱، ۲ و ۳ بنویسیم خواهیم داشت:



شکل (۲-۱۸): اتصال سری و موازی منابع ولتاژی

$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) - (4) = 0V$$

حال اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۲ و ۵ بنویسیم داریم:

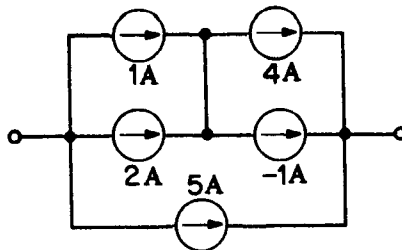
$$v_{eq}(t) = -(3+t) + (7+t) + (-4) = 0V$$

همچنین اگر مسیر حلقه را از طریق منابع ۱، ۴، ۵ و ۳ بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$v_{eq}(t) = -(3+t) - (-3-t) - (-4) - (4) = 0V$$

بنابراین، منبع معادل بین دو سر ابتدایی و انتهایی، برابر صفر است.

تمرین (۲-۲): شکل (۲-۱۹)، ۵ منبع جریان در وضعیت‌های سری و موازی با هم قرار گرفته‌اند. منبع معادل جریانی را برای این منابع بیابید.



شکل (۲-۱۹): اتصال سری و موازی منابع جریانی

جواب: $I_{eq}(t) = 8A$

۲-۷- مشخصات ولتاژ و جریان در مدارهای ساده الکتریکی

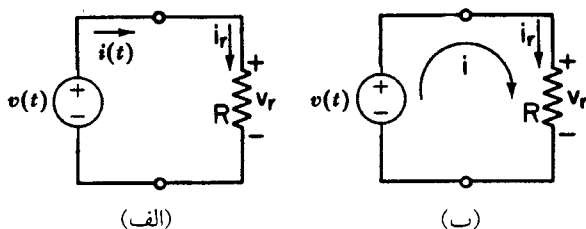
هدف از این بخش آن است که با اتصال منابع و مقاومت‌ها به یکدیگر، مشخصات ولتاژ و جریان هر یک از عناصر را بیان نماییم. بدین منظور یک مدار ساده مطابق شکل

(۲-۲۰) را در نظر بگیرید که یک منبع ولتاژ با یک مقاومت R سری شده باشد. با استفاده از کاربرد قانون KVL در شکل (۲-۲۰-الف) به این نتیجه می‌رسیم که $v(t) = v_r(t)$ خواهد بود و با توجه به آنکه برای عنصر مقاومت رابطه $v_r(t) = R \cdot i_r(t)$ وجود دارد، لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$v(t) = R \cdot i_r(t) \quad (۲-۳۴)$$

همچنین با استفاده از قانون KCL در شکل (۲-۲۰-ب) که همان شکل (۲-۲۰-الف) می‌باشد به این نتیجه می‌رسیم که $i(t) = i_r(t)$ خواهد بود و لذا رابطه اخیر به صورت زیر تغییر می‌یابد:

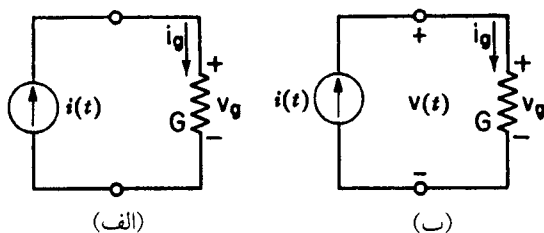
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (۲-۳۵)$$



شکل (۲-۲۰): مدار ساده شامل منبع ولتاژ و مقاومت

همین موضوع را می‌توان برای حالت موازی یک منبع جریان با یک مقاومت، مطابق با شکل (۲-۲۱) نیز بیان نمود. با استفاده از قانون KCL در شکل (۲-۲۱-الف) به این نتیجه می‌رسیم که $i(t) = i_g(t)$ خواهد بود. همچنین با توجه به رابطه جریان با ولتاژ یک مقاومت که به صورت $i_g(t) = G \cdot v_g(t)$ است، نتیجه می‌گیریم که،

$$i(t) = G \cdot v_g(t) \quad (۲-۳۶)$$



شکل (۲-۲۱): مدار ساده شامل منبع جریان و مقاومت

از طرف دیگر در شکل (۲-۲۱-ب) اگر قانون KVL را بیان کنیم به این نتیجه می‌رسیم که $v(t) = v_g(t)$ خواهد بود. لذا رابطه اخیر به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$i(t) = G \cdot v(t) \quad (۳۷-۲)$$

که $i(t)$ جریان منبع و $v(t)$ ولتاژ دو سر منبع است.

در مدار ساده ارائه شده در شکل (۲۲-۲)، نحوه تقسیم ولتاژ بین مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از قانون KVL جریان $i(t)$ منبع را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

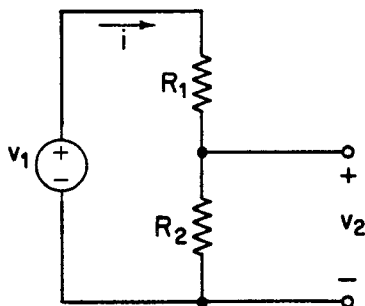
$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R_1 + R_2} \quad (۳۸-۲)$$

حال با توجه به آنکه ولتاژ دو سر مقاومت R_2 برابر $v_2(t) = R_2 \cdot i(t)$ خواهد بود لذا با استفاده از معادله (۳۸-۲)، ولتاژ $v_2(t)$ را می‌توان به شکل زیر تعیین نمود:

$$v_2(t) = R_2 \cdot i(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1(t) \quad (۳۹-۲)$$

در نتیجه،

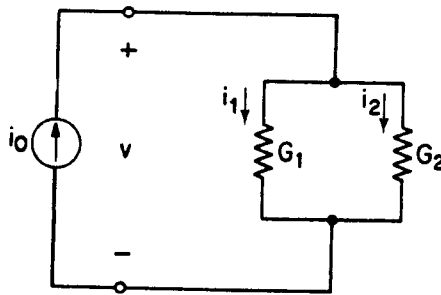
$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (۴۰-۲)$$



شکل (۲۲-۲): تقسیم ولتاژ بین دو مقاومت

لازم به ذکر است که این تقسیم‌بندی ولتاژ، وقتی صحیح است که جریان عبوری از هر دو مقاومت، مساوی هم باشند. اکنون مشابه حالت قبل، می‌خواهیم نحوه تقسیم جریان بین دو مقاومت با رسانایی G_1 و G_2 را بیابیم. بدین منظور مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۳-۲) را در نظر بگیرید. با توجه به موازی بودن مقاومت‌های با رسانایی G_1 و G_2 می‌توان نوشت:

$$v(t) = \frac{i_o(t)}{G_1 + G_2} \quad (۴۱-۲)$$



شکل (۲-۲۳): تقسیم جریان بین دو مقاومت

از طرف دیگر می‌دانیم که $i_1(t) = G_1 \cdot v(t)$ خواهد بود که با جایگذاری در معادله اخیر خواهیم داشت:

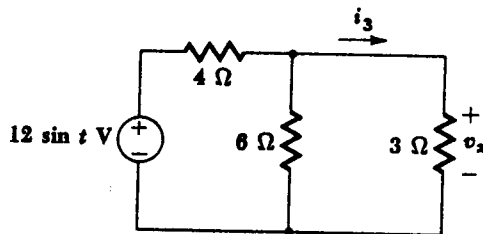
$$\frac{i_1(t)}{G_1} = \frac{i_o(t)}{G_1 + G_2}$$

$$\frac{i_1(t)}{i_o(t)} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (۲-۴۲)$$

به‌طور مشابه، سهم جریان $i_2(t)$ از جریان $i_o(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{i_2(t)}{i_o(t)} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (۲-۴۳)$$

مثال (۲-۴): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۲۴) یک منبع ولتاژ به مقدار $12 \sin t$ به سه مقاومت متصل شده است. در این مدار، i_3 و v_x را بیابید.



شکل (۲-۲۴): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۲-۳)

حل: با توجه به آنکه مقاومت‌های 3Ω و 6Ω با هم موازی هستند لذا مقاومت معادل این دو برابر 2Ω می‌شود. از طرف دیگر با توجه به آنکه ولتاژ v_x برای مقاومت 3Ω و 6Ω و معادل این دو یعنی 2Ω یکسان می‌باشد، لذا با استفاده از تقسیم ولتاژ و رابطه (۲-۴۰) خواهیم داشت:

$$v_x(t) = \frac{2}{4+2} v_1(t) = \frac{1}{3} \times 12 \sin t = 4 \sin t \quad (\text{V})$$

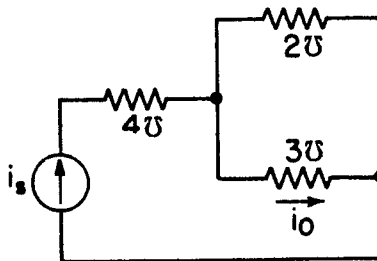
حال برای تعیین جریان i_3 ، کافی است که ولتاژ $v_x(t)$ را بر مقاومت 3Ω تقسیم کنیم. یعنی،

$$i_3(t) = \frac{v_x(t)}{3} = \frac{4 \sin t}{3} = \frac{4}{3} \sin t \quad (\text{A})$$

جریان عبوری از منبع ولتاژ را نیز می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$i(t) = \frac{12 \sin t}{4+2} = 2 \sin t \quad (\text{A})$$

تمرین (۳-۲): در شکل (۲-۲۵)، اگر منبع جریان به مقدار $i_s(t) = 3 \cos 2t$ باشد، جریان $i_o(t)$ را بیابید.



شکل (۲-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۲)

جواب: $i_o(t) = \frac{9}{5} \cos 2t \quad (\text{A})$

۲-۸- خلاصه و نتیجه‌گیری

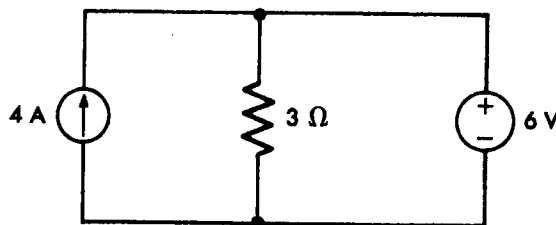
در این فصل با عناصر اساسی مدارهای الکتریکی از قبیل مقاومت و منابع ولتاژ و جریان آشنا شدیم. پس از آشنایی با این عناصر، به تحلیل ساده این نوع مدارها پرداختیم که خلاصه این مباحث را می‌توان به صورت موارد زیر بیان نمود:

- عناصر دوسر مورد بحث در این کتاب، دارای مشخصه‌ای در صفحه $v-i$ هستند با توجه به خطی بودن این عناصر، این مشخصه از مبدا صفحه عبور کرده و به صورت خطوط مستقیم هستند. همچنین این مشخصه‌ها تغییرناپذیر با زمان می‌باشند.
- عنصر مقاومت خطی دارای مشخصه‌ای است که در صفحه $v-i$ با یک خط عبوری از مرکز نشان داده می‌شود که شیب آن برابر مقاومت R است. لذا رابطه حاکم بر این عنصر $v(t) = R \cdot i(t)$ خواهد بود.

- منابع الکتریکی به دو نوع منابع مستقل و وابسته تقسیم می‌شوند. منابع مستقل، مشخصه تولیدی آنان با زمان تغییر نمی‌یابد ولی مشخصه تولیدی منابع وابسته، با زمان تغییر می‌یابد.
- منابع الکتریکی مستقل به دو نوع ولتاژی و جریانی تقسیم می‌گردند. منبع مستقل ولتاژی دارای مشخصه‌ای به صورت یک خط راست موازی با محور جریان i می‌باشد. به عبارت دیگر، تحت هر جریان تولیدی توسط آن (که ناشی از میزان جریان دریافتی توسط بار است) مشخصه ولتاژ تولیدی آن همیشه ثابت خواهند ماند. منبع مستقل جریانی دارای مشخصه‌ای موازی با محور ولتاژ v می‌باشد.
- منابع الکتریکی وابسته به چهار نوع منابع ولتاژی وابسته به جریان یا ولتاژ، و منابع جریانی وابسته به جریان یا ولتاژ می‌باشد.
- با سری شدن عناصر مقاومت، مقاومت معادل از جمع تک تک مقاومت‌ها حاصل می‌شود. $(R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i)$ همچنین اگر عناصر مقاومت به طور موازی بسته شوند، مقاومت معادل آنها دارای مقدار رسانایی است که از جمع تمام رسانایی مقاومت‌ها حاصل می‌گردد $(G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i)$.
- در صورتی که منابع ایده‌آل ولتاژی با هم به طور سری بسته شوند، منبع ولتاژ معادل، دارای ولتاژی برابر با جمع جبری تمام ولتاژ منابع خواهد بود. همچنین با موازی شدن منابع جریان، مقدار جریان معادل این منابع، از جمع جبری جریان تک تک منابع حاصل می‌شود.

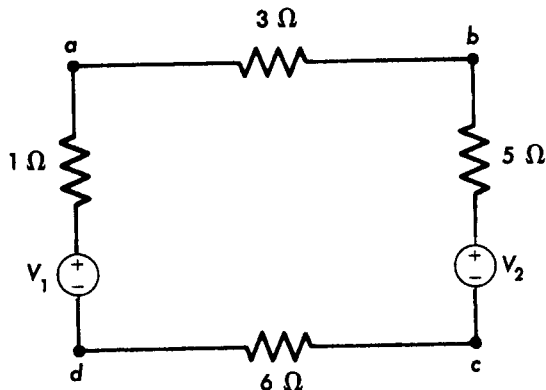
۲-۹- مسائل مروری

- ۱- شکل (۲-۲۶) مداری را نشان می‌دهد که در ارتباط با مفاهیم منابع ولتاژ و جریان است. در این مدار، توانی را که منبع ولتاژ تولید می‌کند، محاسبه کنید.



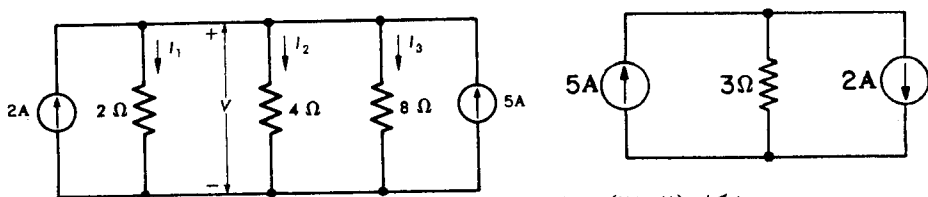
شکل (۲-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- یک مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۷-۲) مفروض می‌باشد. با استفاده از قانون KVL مقدار توان الکتریکی مصرفی روی هر مقاومت را بیابید.



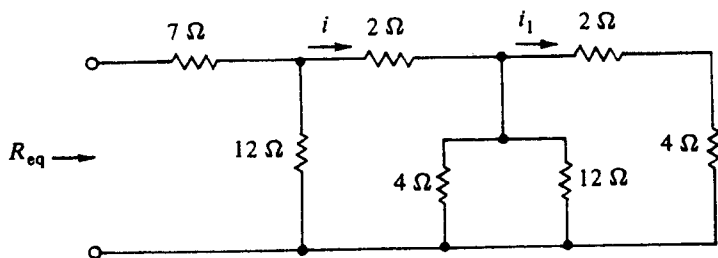
شکل (۲۷-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- شکل (۲۸-۲) دو مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. در هر یک از این مدارها، توان مصرفی هر مقاومت را با استفاده از قانون KCL بیابید.



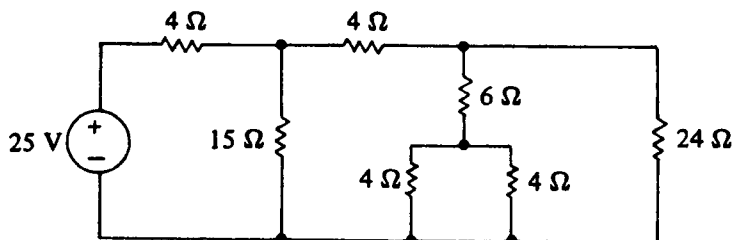
شکل (۲۸-۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۹-۲)، مقدار مقاومت معادل R_{eq} را بیابید. همچنین اگر $i = 6A$ باشد مقدار i_1 را بیابید.



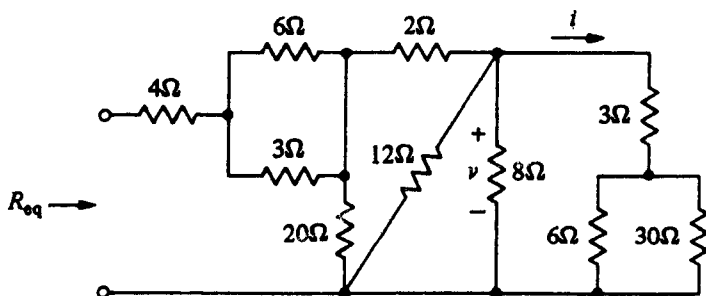
شکل (۲۹-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۰)، توان الکتریکی مصرفی در مقاومت 15Ω را بیابید.



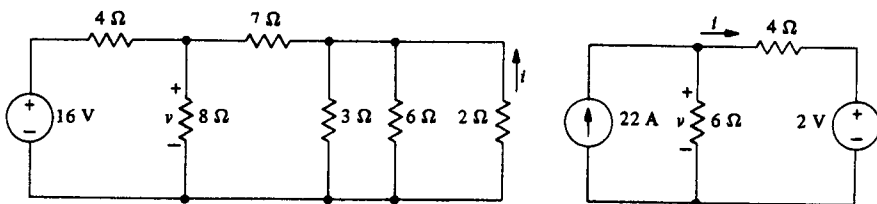
شکل (۲-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- در شکل (۲-۳۱) مدار الکتریکی نشان داده شده است. در این مدار، R_{eq} را بیابید. همچنین اگر یک منبع با ولتاژ ثابت $50V$ به دو سر پایانه ورودی متصل شوند، ولتاژ v و جریان i مشخص شده در مدار را بیابید.



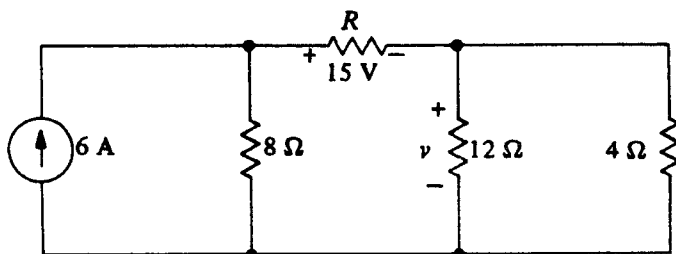
شکل (۲-۳۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

۷- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۲)، مقادیر ولتاژ و جریان i و v را بیابید.



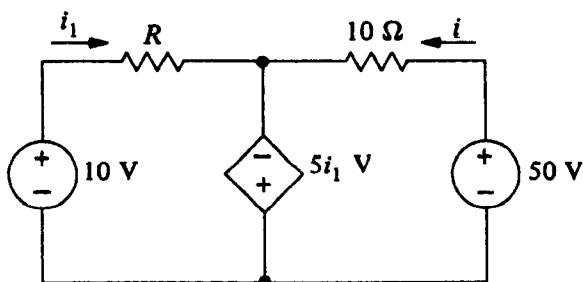
شکل (۲-۳۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- شکل (۲-۳۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که مقادیر R و v به‌عنوان مقادیر مجهول می‌باشند. این مقادیر را تعیین کنید.



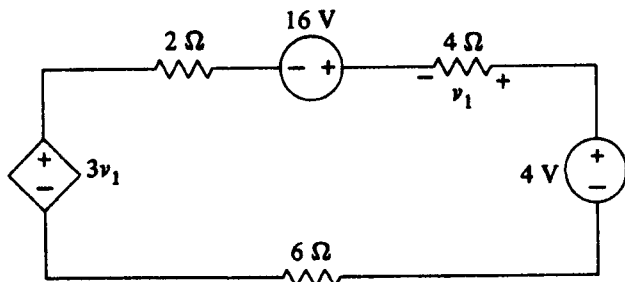
شکل (۲-۳۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۲-۳۴)، در صورتی‌که $R = 10\ \Omega$ باشد، مقدارهای i و i_1 را بیابید.



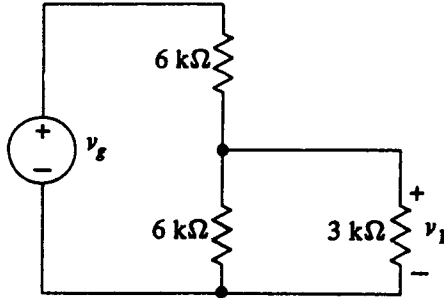
شکل (۲-۳۴): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۲-۳۵)، با تعیین جریان مدار، توان تلفاتی روی مقاومت $6\ \Omega$ را بیابید.



شکل (۲-۳۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱- در شکل (۳۶-۲) که یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد، مقدار ولتاژ v_1 را برحسب مقدار ولتاژ منبع v_g بیابید.



شکل (۳۶-۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)

فصل سوم

روش‌های تحلیل شبکه‌های مقاومتی

۳-۱- مقدمه

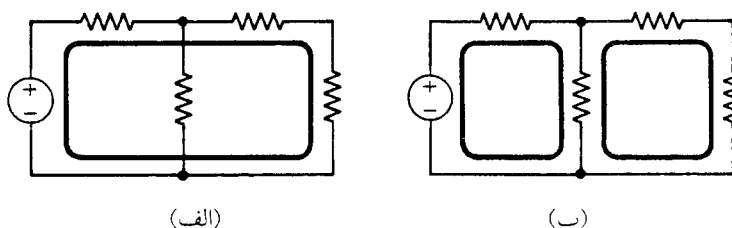
در فصول قبلی پس از آشنایی با عناصر اصلی مدارهای الکتریکی از قبیل منابع الکتریکی و مقاومت‌ها و بیان قوانین اساسی KVL، KCL و قانون اهم، به تحلیل مدارهای ساده الکتریکی پرداختیم. در این فصل می‌خواهیم روش‌های اصولی تحلیل مدارهای الکتریکی از نوع مقاومتی را بیان نماییم. منظور از مدارهای مقاومتی، مدارهایی است که علاوه بر وجود منابع الکتریکی، تنها از عنصر مقاومت استفاده می‌کنند. از روش‌های اساسی در تحلیل مدارهای الکتریکی می‌توان به روش‌های مش، گره، جمع‌آثار و مدار معادل تونن اشاره نمود که در این فصل، این روش‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصول آینده، پس از بیان دیگر عناصر مدار از قبیل سلف‌ها و خازن‌ها، روش‌های تحلیل مدار ارائه‌شده در این فصل را به مدارهای کامل‌تر با وجود عناصر مقاومت، سلف، خازن و منابع گسترش خواهیم داد.

۳-۲- روش تحلیل مش

در این بخش برآنیم تا اصول تحلیل مدارهای الکتریکی را بر اساس روش مش بیان نماییم. برای درک این روش، ابتدا تحلیل یک مدار با دو مش را آغاز کرده و سپس روش ارائه شده را به مدارهای جامع‌تر و با مش‌های بیشتری گسترش خواهیم داد.

۳-۲-۱- معادلات مش برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KVL مفهوم حلقه را بیان نمودیم که هر حلقه از عناصری تشکیل شده‌اند که در نهایت، یک مسیر بسته را ایجاد می‌کردند. حال در اینجا با مفهوم خاصی به نام مش آشنا می‌شویم. یک مش، حلقه‌ای خواهد بود که آن حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده باشد. به عنوان مثال، در شکل (۳-۱-الف) حلقه در نظر گرفته شده، مش نمی‌باشد؛ زیرا حلقه مورد نظر، شاخه وسطی را محصور کرده است. اما در شکل (۳-۱-ب) دو حلقه در نظر گرفته شده، دو مش می‌باشد، زیرا هر دو حلقه، هیچ شاخه‌ای را محصور نکرده است. به این حلقه‌ها، حلقه‌های اساسی مدار می‌گویند.



شکل (۳-۱): مثالی ساده برای مفهوم حلقه و مش؛ (الف) حلقه؛ (ب) مش

برای بیان اصول کلی روش مش، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۲-الف) را در نظر بگیرید که در این شکل، برای هر عنصر مقاومت، جریان و ولتاژی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس مشخصه $v-i$ برای این سه مقاومت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{R1}(t) &= R_1 \cdot i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) &= R_2 \cdot i_{R2}(t) \\ v_{R3}(t) &= R_3 \cdot i_{R3}(t) \end{aligned} \quad (1-3)$$

حال برای این مدار بر اساس شکل (۳-۲-ب) دو مش در نظر می‌گیریم. سپس برای هر مش، معادله KVL را بر اساس متغیرهای شکل (۳-۲-الف) می‌نویسیم. لذا،

$$v_{s1}(t) = v_{R1}(t) + v_{R3}(t) \quad (2-3)$$

$$-v_{s2}(t) = v_{R2}(t) - v_{R3}(t) \quad (3-3)$$

با کاربرد روابط (۱-۳) در معادلات (۲-۳) و (۳-۳) می‌توان نوشت:

$$v_{s1}(t) = R_1 \cdot i_{R1}(t) + R_3 \cdot i_{R3}(t) \quad (4-3)$$

$$-v_{s2}(t) = R_2 \cdot i_{R2}(t) - R_3 \cdot i_{R3}(t) \quad (5-3)$$

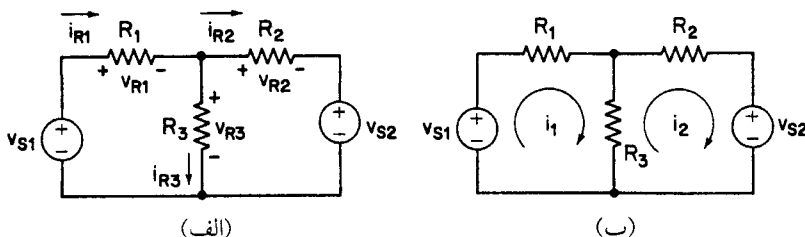
در مرحله بعدی روش تحلیل مش، برای هر مش، یک جریان در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم که در شکل (۳-۲-ب) با دو جریان مش i_1 و i_2 می‌باشد. با مقایسه این

دو جریان مش در شکل (۳-۲-ب) با جریان‌های ارائه‌شده در شکل (۳-۲-الف) نتیجه می‌گیریم که،

$$i_{R1}(t) = i_1(t)$$

$$i_{R2}(t) = i_2(t) \quad (۳-۶)$$

$$i_{R3}(t) = i_1(t) - i_2(t)$$



شکل (۳-۲): یک مدار الکتریکی با دو حلقه؛ (الف) بر اساس جریان شاخه‌ها؛ (ب) بر اساس جریان مش‌ها

با استفاده از مجموعه روابط (۳-۶) در دو معادله (۳-۴) و (۳-۵) خواهیم داشت:

$$v_{S1}(t) = (R_1 + R_3) \cdot i_1(t) - R_3 \cdot i_2(t) \quad (۳-۷)$$

$$-v_{S2}(t) = -R_3 \cdot i_1(t) + (R_2 + R_3) \cdot i_2(t) \quad (۳-۸)$$

دو معادله اخیر، به دو معادله اساسی روش تحلیل مش معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی پیدا می‌کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به راحتی معادلات مش را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع ولتاژی که جریان تولیدی آنان در جهت جریان حلقه باشند، با علامت مثبت در سمت چپ معادله آورده می‌شود. مثلاً در حلقه دوم، منبع $v_{S2}(t)$ ، جریانی در جهت خلاف جهت جریان حلقه $i_2(t)$ ارسال می‌کند. لذا به صورت علامت منفی در معادله دوم آورده شده است.

۲- در معادله اول، جمله $(R_1 + R_3) \cdot i_1(t)$ بیانگر افت ولتاژ کل مقاومت‌های مسیر حلقه موردنظر می‌باشد. در حلقه دوم نیز دو مقاومت R_2 و R_3 وجود دارد. پس یک جمله $(R_2 + R_3) \cdot i_2(t)$ در سمت راست معادله دوم وارد می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که جریان عبوری از آنان فقط جریان همان مش نباشد و جریان مش‌های دیگر نیز از آن مقاومت عبور می‌کند، باید افت ولتاژ روی آن مقاومت ناشی از جریان مش دیگر را وارد آن معادله کرد. اگر جهت جریان مش دیگر، هم جهت با جریان مش موردنظر باشد، ولتاژ با علامت مثبت وارد شده و در غیر این صورت با علامت منفی

می‌آید. مثلاً در معادله (۷-۳) که در ارتباط با معادله مش در حلقه اول است، جمله $R_3 \cdot i_2(t)$ با علامت منفی وارد می‌شود؛ چون مقاومت R_3 علاوه بر جریان مش اول (یعنی $i_1(t)$) جریان مش دوم (یعنی $i_2(t)$) در خلاف جهت $i_1(t)$ از آن عبور می‌کند. لذا جمله $-R_3 \cdot i_2(t)$ در سمت راست معادله آورده می‌شود. همین موضوع را می‌توان برای جمله $-R_3 \cdot i_1(t)$ برای معادله مش در حلقه دوم نیز بیان نمود. برای سادگی در نمایش معادلات مش، دو معادله (۷-۳) و (۸-۳) را می‌توان به شکل نمایش ماتریسی نیز بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} v_{s1}(t) \\ -v_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

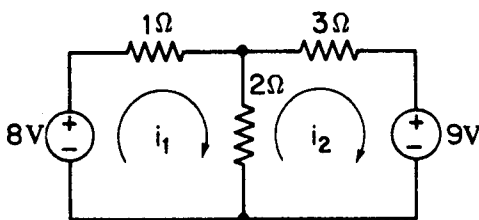
$$\mathbf{V}_s(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}(t)$$

برای تعیین جریان‌های i_1 و i_2 مربوط به دو مش، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ضمیمه (الف) اشاره شده است. یکی از مناسب‌ترین این روش‌ها، روش کرامر است. بر اساس این روش، برای تعیین جریان i_1 کافی است که با جایگذاری بردار $\mathbf{V}_s(t)$ از معادله (۹-۳) در ستون اول ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ و تعیین دترمینان آن و تقسیم دترمینان حاصل شده بر دترمینان ماتریس ضرایب $\mathbf{R}$ ، جریان i_1 به دست می‌آید. یعنی،

$$i_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} v_{s1}(t) & -R_3 \\ -v_{s2}(t) & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

این موضوع را برای جریان i_2 نیز می‌توان بیان نمود. در نهایت پس از محاسبه جریان مش‌ها و با استفاده از روابط (۶-۳) قادر هستیم تا جریان تمام شاخه‌ها و عناصر مدار را به دست آورده و سپس ولتاژ دو سر تمام عناصر و دیگر پارامترهای هر عنصر را بیابیم.

مثال (۱-۳): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۳)، جریان دو مش را بیابید. سپس جریان شاخه مقاومت 2Ω را بیابید.



شکل (۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱-۳)

حل: در ابتدا دو مش با جریان‌های i_1 و i_2 در نظر می‌گیریم. بر اساس قواعد ارائه‌شده در این بخش، دو معادله از قانون KVL را به صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 3+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

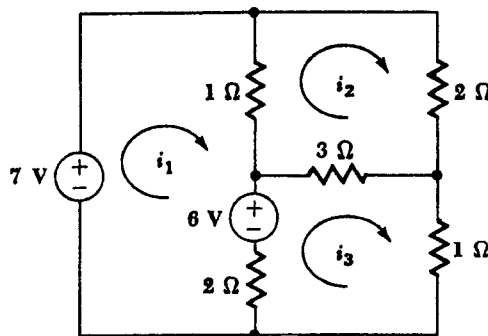
در صورتی که از روش معکوس‌گیری ماتریس ضرایب استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پس از تعیین جریان مش‌ها، جریان شاخه با مقاومت 2Ω از تفاضل جریان‌های i_1 و i_2 به دست می‌آید:

$$I_{eq} = i_1 - i_2 = 2 - (-1) = 3A$$

مثال (۲-۳): شکل (۴-۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، جریان سه مش را بیابید.



شکل (۴-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۲-۳)

حل: با استفاده از قانون KVL برای سه حلقه خواهیم داشت:

$$7 - 6 = (1+2) \cdot i_1 - 1 \times i_2 - 2 \times i_3$$

$$0 = (1+2+3) \cdot i_2 - 1 \times i_1 - 3 \times i_3$$

$$6 = (3+1+2) \cdot i_3 - 3 \times i_2 - 2 \times i_1$$

این سه معادله را به شکل ماتریسی زیر مرتب می‌کنیم.

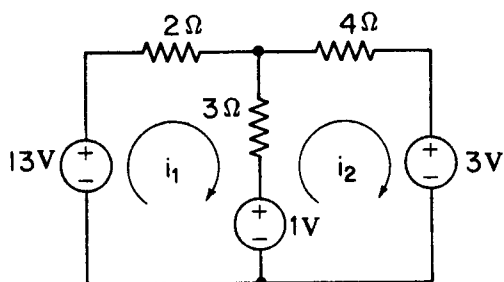
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش کرامر جریان i_3 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{11V}{3A} = 3A$$

و جریان مش‌های اول و دوم برابر $i_1 = 3A$ و $i_2 = 2A$ می‌شود.

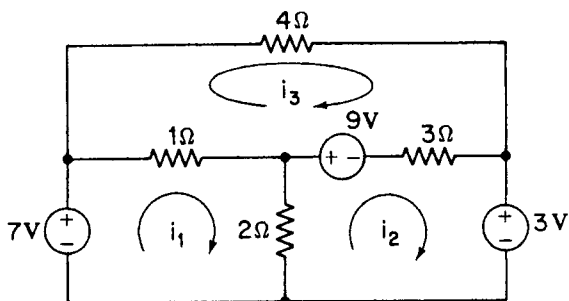
تمرین (۱-۳): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۳) جریان مش‌ها را بیابید و سپس جریان مقاومت 3Ω را بیابید.



شکل (۵-۳): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱-۳)

جواب: $i_3 = 2A$ ، $i_2 = 1A$ ، $i_1 = 3A$

تمرین (۲-۳): شکل (۶-۳) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل مش، سه جریان مش‌ها را بیابید. سپس جریان مقاومت‌های 4Ω و 3Ω را بیابید.



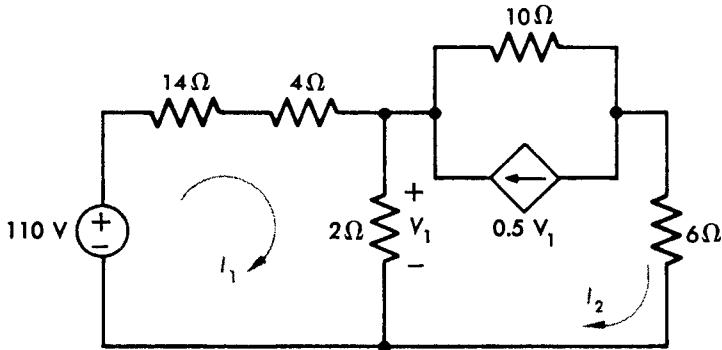
شکل (۶-۳): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۳)

جواب: $i_1 = 2A$ ، $i_2 = -1A$ ، $i_3 = 1A$ ، $i_{3\Omega} = 2A$ ، $i_{4\Omega} = 1A$

۳-۲-۲- معادلات مش در مدارهای با منابع وابسته

در بسیاری از مدارهای الکتریکی، منابع وابسته در کنار دیگر عناصر مدارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. اولین خاصیت منابع وابسته آن است که مثل منابع مستقل، می‌توان تبدیل منابع ولتاژی به معادل جریانی و بالعکس را انجام داد و قوانین KVL و KCL را به‌کار برد. دومین خاصیت این منابع آن است که ولتاژ یا جریان تولیدی آنان، وابسته به ولتاژ یا جریان عنصر دیگری از مدار می‌باشد. لذا در روش تحلیل مش، پس از آنکه معادلات مربوط به قانون KVL را برای تمام مش‌ها بیان نمودیم، باید وابستگی موجود در منابع وابسته را به‌عنوان معادلات مکمل، در کنار دیگر معادلات مش در نظر گرفت. در نهایت با حل این معادلات، جریان مش‌ها و دیگر مشخصات مدار به‌دست می‌آید. در مثال زیر این روند تشریح می‌گردد.

مثال (۳-۳): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۳)، جریان‌های i_1 و i_2 در دو مش مدار را بیابید.



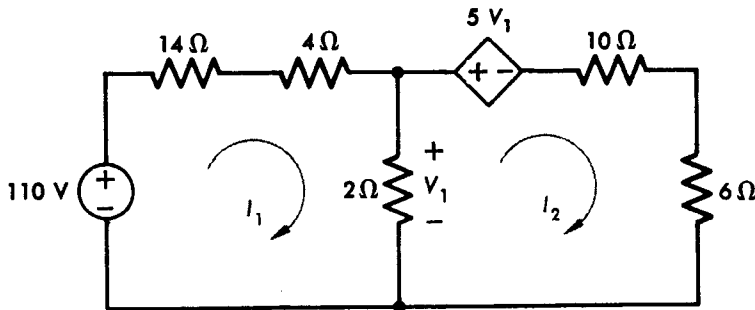
شکل (۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۳)

حل: در این مدار، یک منبع جریان وابسته به ولتاژ به‌کار رفته است. در ابتدا برای ساده‌سازی مدار، با توجه به آنکه منبع جریان وابسته با یک مقاومت 10Ω موازی شده است، لذا ابتدا منبع معادل ولتاژی آن را بر اساس مطالب ارائه شده در بخش (۲-۴) به‌دست می‌آوریم. بدین منظور منبع ولتاژ به‌مقدار $0.5V_1 \times 10 = 5V_1$ خواهد بود که با

مقاومت 10Ω سری می‌شود. این وضعیت در شکل (۸-۳) نشان داده شده است. حال معادلات مربوط به قانون KVL را برای دو مش مدار شکل (۸-۳) می‌نویسیم:

$$110 = (14 + 4 + 2) \cdot I_1 - 2 \times I_2$$

$$-5V_1 = -2 \times I_1 + (2 + 10 + 6) \cdot I_2$$



شکل (۸-۳): اصلاح مدار الکتریکی شکل (۷-۳)

اما این دو معادله مش با سه متغیر خواهد بود و برای حل آن، نیاز به یک معادله دیگر خواهد بود. معادله سوم بر اساس رابطه مقید شده توسط منبع وابسته ایجاد می‌شود. ولتاژ V_1 که دو سر مقاومت 2Ω می‌باشد بر اساس جریان‌های دو مش به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$V_1 = (I_1 - I_2) \times 2$$

حال از سه معادله اخیر، سه متغیر I_1 و I_2 و V_1 به دست می‌آید:

$$I_1 = 5A$$

$$I_2 = -5A$$

$$V_1 = 20V$$

پس با استفاده از این مثال، روال کلی روش تحلیل مش با وجود منابع وابسته را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

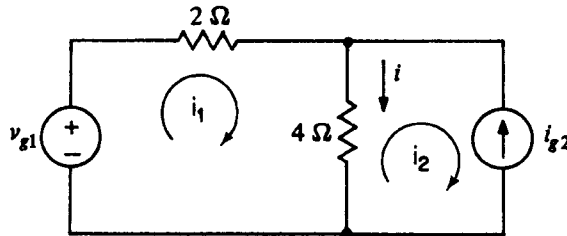
۱- ابتدا معادلات مش را برای تمام مش‌های مدار و با وجود منابع وابسته (و مشابه با منابع مستقل) می‌نویسیم. در این قسمت، سعی می‌گردد که منابع جریانی به منابع معادل ولتاژی تبدیل گردند.

۲- در این مرحله با مشخص کردن منابع وابسته، معادله‌های مقیدساز این منابع را به دسته معادلات اول اضافه می‌کنیم.

۳- مجموعه معادلات مراحل اول و دوم را در کنار هم قرار داده و مجهولات این دسته معادلات را حل می‌کنیم.

موضوع دیگری که در روش تحلیل مش در مدارهای الکتریکی وجود دارد آن است که در صورتی که در یک مش، منبع جریانی به‌طور سری با دیگر عناصر مدار وجود داشته باشد، دیگر برای این مش نیازی نیست که معادله مربوط به قانون KVL را برای آن بنویسیم؛ زیرا هدف از نوشتن معادله KVL در روش تحلیل مش آن است که جریان مش را تعیین کنیم و چون در این مش، یک منبع جریان وجود دارد، لذا جریان این مش همیشه و تحت هر شرایطی برابر مقدار جریان تولیدی توسط منبع جریان است. این موضوع را در مثال بعدی مشاهده خواهیم کرد و روش حل مدار را بیان می‌کنیم.

مثال (۳-۴): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۹)، اگر مقادیر $V_{g1} = 18V$ و $i_{g2} = 3A$ را داشته باشیم، با استفاده از روش تحلیل مش، جریان عبوری از مقاومت 4Ω (یعنی جریان i) را بیابید.



شکل (۳-۹): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۴)

حل: در این مدار، دو مش وجود دارد که با جریان‌های i_1 و i_2 مشخص می‌شوند. با توجه به آنکه در مش دوم، منبع جریانی با مقدار $3A$ وجود دارد پس نتیجه می‌گیریم که $i_2 = -3A$ است؛ زیرا جریان مش در خلاف جهت جریان منبع است. حال قانون KVL را برای مش اول می‌نویسیم:

$$18 = (2 + 4) \cdot i_1 - 4 \times i_2$$

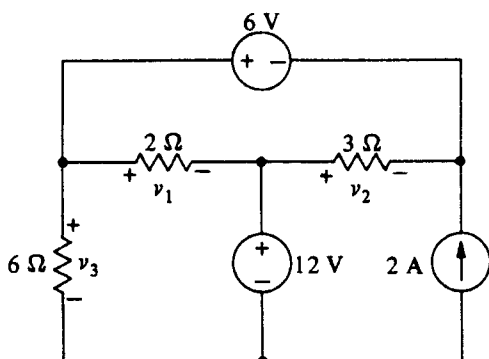
با توجه به آنکه $i_2 = -3A$ است لذا i_1 به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$i_1 = \frac{18 + 4 \times (-3)}{6} = \frac{6}{6} = 1A$$

در نتیجه جریان i برابر خواهد بود با:

$$i = i_1 - i_2 = 1 + 3 = 4A$$

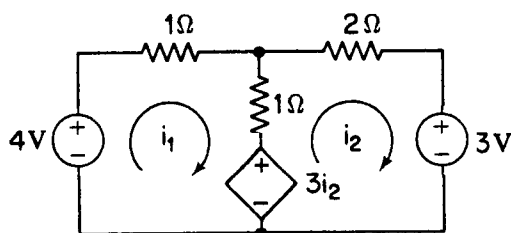
تمرین (۳-۳): با استفاده از روش تحلیل مش، مجهولات v_1 ، v_2 و v_3 را در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۱۰) بیابید.



شکل (۳-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۳)

جواب: $v_1 = 2V$ ، $v_2 = 4V$ ، $v_3 = 14V$

تمرین (۳-۴): در مدار الکتریکی شکل (۳-۱۱)، جریان‌های i_1 و i_2 در دو مش را بیابید.



شکل (۳-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۴)

جواب: $i_1 = 3A$ و $i_2 = -1A$

۳-۳- روش تحلیل گره

مشابه روش تحلیل مش، در این بخش نیز روش مفید دیگری به نام روش تحلیل گره را بیان می‌کنیم. برای بیان اصول کلی این روش، ابتدا یک مدار ساده با دو گره را مورد بررسی قرار داده و سپس به مدارهای کامل‌تر و جامع‌تری اشاره خواهیم نمود.

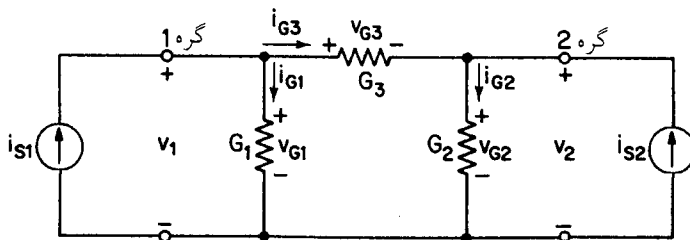
۳-۳-۱- معادلات گره برای مدارهای ساده

در فصل اول، برای پیاده‌سازی قانون KCL، مفهوم گره را بیان نمودیم. در آنجا بیان نمودیم که جمع جبری تمام جریان‌های مربوط به شاخه‌های متصل به هر گره، برابر صفر

می‌باشد. در قانون KCL، جریان‌های ورودی را با علامت منفی و جریان‌های خروجی از هر گره را با علامت مثبت در نظر می‌گیریم که در یک طرف معادله می‌آیند. شکل دیگر بیان قانون KCL آن است که جمع جریان‌های ورودی با جمع جریان‌های خروجی، برابر خواهد بود. حال در روش تحلیل گره، یک گره از گره‌های مدار را به‌عنوان گره مبنا اختیار می‌کنیم و ولتاژ دیگر گره‌های مدار را نسبت به گره مبنا محاسبه می‌کنیم (معمولاً ولتاژ گره مبنا را به مقدار صفر در نظر می‌گیریم).

برای بیان اصول کلی این روش، مدار الکتریکی شکل (۱۲-۳) را در نظر بگیرید. در این شکل، برای هر عنصر، یک جریان و ولتاژی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس رابطه $v-i$ برای این سه مقاومت با رسانایی G_1 ، G_2 و G_3 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i_{G1}(t) &= G_1 \cdot v_{G1}(t) \\ i_{G2}(t) &= G_2 \cdot v_{G2}(t) \\ i_{G3}(t) &= G_3 \cdot v_{G3}(t) \end{aligned} \quad (12-3)$$



شکل (۱۲-۳): یک مدار ساده با دو گره

حال در مدار مذکور متوجه می‌شویم که غیر از گره مبنا (که همان گره پایینی مدار با ۴ شاخه متصل به آن است) دو گره دیگر با شماره‌های ۱ و ۲ وجود دارد. در صورتی که قانون KCL را برای بین این دو گره بنویسیم، خواهیم داشت:

$$i_{s1}(t) = i_{G1}(t) + i_{G3}(t) \quad (13-3)$$

$$i_{s2}(t) = i_{G2}(t) - i_{G3}(t) \quad (14-3)$$

با کاربرد روابط (۱۲-۳) در معادلات (۱۳-۳) و (۱۴-۳) می‌توان نوشت:

$$i_{s1}(t) = G_1 \cdot v_{G1}(t) + G_3 \cdot v_{G3}(t) \quad (15-3)$$

$$i_{s2}(t) = G_2 \cdot v_{G2}(t) - G_3 \cdot v_{G3}(t) \quad (16-3)$$

در مرحله بعدی روش تحلیل گره، برای هر گره، یک ولتاژ با شماره گره در نظر می‌گیریم که در این شکل، ولتاژهای $v_1(t)$ برای گره ۱ و $v_2(t)$ برای گره ۲ هستند. با مقایسه این دو ولتاژ گره با ولتاژهای ارائه شده برای عناصر در شکل (۱۲-۳) نتیجه می‌گیریم که،

$$v_{G1}(t) = v_1(t)$$

$$v_{G2}(t) = v_2(t) \quad (۱۷-۳)$$

$$v_{G3}(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

با استفاده از مجموعه روابط (۱۷-۳) در هر دو معادله (۱۵-۳) و (۱۶-۳) خواهیم داشت:

$$i_{s1}(t) = (G_1 + G_3) \cdot v_1(t) - G_3 \cdot v_2(t) \quad (۱۸-۳)$$

$$i_{s2}(t) = -G_3 \cdot v_1(t) + (G_2 + G_3) \cdot v_2(t) \quad (۱۹-۳)$$

دو معادله اخیر به دو معادله اساسی روش تحلیل گره معروف است. با کمی دقت در این دو معادله به نکات جامعی دسترسی می‌یابیم که با استفاده از آنها می‌توان به راحتی معادلات گره را بیان نمود. این نکات عبارتند از:

۱- منابع جریانی که جهت جریان تولیدی آنان به سمت گره موردنظر می‌باشد، با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره موردنظر آورده می‌شود. مثلاً در گره اول، جریان منبع $i_{s1}(t)$ به سمت داخل گره ۱ بوده و لذا با علامت مثبت در سمت چپ معادله گره ۱ در رابطه (۱۸-۳) وارد می‌شود.

۲- در معادله اول جمله $(G_1 + G_3) \cdot v_1(t)$ در سمت راست معادله، بیانگر کل جریان خروجی از گره ۱ ناشی از ولتاژ همان گره می‌باشد. در معادله دوم نیز چون دو مقاومت با رسانایی G_2 و G_3 به گره ۲ متصل است لذا جمله $(G_2 + G_3) \cdot v_2(t)$ با علامت مثبت در سمت راست معادله آورده می‌شود.

۳- در مقاومت‌هایی که بین دو گره واقع می‌شوند، باید جریان ناشی از گره مقابل را به صورت علامت منفی در گره مربوطه وارد نمود. به عنوان مثال، چون مقاومت با رسانایی G_3 بین دو گره ۱ و ۲ واقع شده است لذا جمله $G_3 \cdot v_2(t)$ با علامت منفی در معادله اول مربوط به گره اول و در سمت راست آن آورده می‌شود.

برای سادگی در نمایش معادلات گره، دو معادله (۱۸-۳) و (۱۹-۳) را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم:

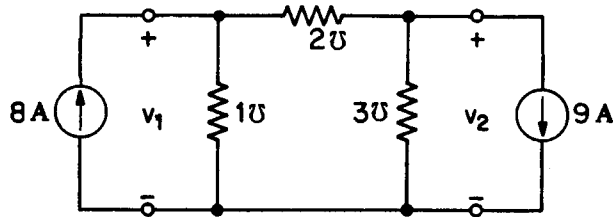
$$\begin{bmatrix} i_{s1}(t) \\ i_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (۲۰-۳)$$

و یا،

$$\mathbf{I}_s(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}(t) \quad (۲۱-۳)$$

مشابه روش تحلیل مش، برای تعیین ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در دو گره ۱ و ۲ می‌توان از روش کرامر استفاده نمود و یا اینکه ماتریس ضرایب $\mathbf{G}$ در معادله (۲۱-۳) را معکوس نموده و در بردار جریان $\mathbf{I}_s(t)$ ضرب کنیم تا بردار $\mathbf{V}(t)$ تعیین شود. در نهایت می‌توان گفت که با مشخص شدن ولتاژ گره‌ها قادریم تا جریان تمام شاخه‌ها را محاسبه کنیم.

مثال (۵-۳): شکل (۱۳-۳) یک مدار الکتریکی ساده با دو گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.



شکل (۱۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۵-۳)

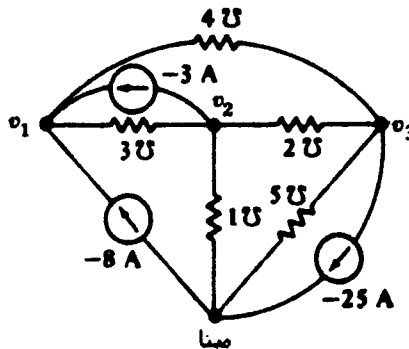
حل: با استفاده از قانون KCL برای این دو گره و بر اساس معادله (۳-۲۰)، معادلات ماتریسی گره به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 3+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

علامت منفی برای منبع جریان در گره ۲ به این خاطر است که جریان این منبع از گره ۲ خارج می‌شود، لذا با علامت منفی در سمت چپ معادله مربوط به گره ۲ وارد می‌شود. سپس با استفاده از روش معکوس‌گیری در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال (۶-۳): شکل (۱۴-۳) یک مدار الکتریکی با سه گره (بدون گره مبنا) را نشان می‌دهد. ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ را با استفاده از روش تحلیل گره تعیین نمایید.



شکل (۱۴-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۶-۳)

حل: با استفاده از قانون KCL برای سه گره مدار، روابط زیر را داریم:

$$(-3) + (-8) = (3 + 4) \cdot v_1(t) - 3 \times v_2(t) - 4 \times v_3(t)$$

$$-(-3) = -3 \times v_1(t) + (3 + 2 + 1) \cdot v_2(t) - 2 \times v_3(t)$$

$$-(-25) = -4 \times v_1(t) - 2 \times v_2(t) + (2 + 5) \cdot v_3(t)$$

و اگر این سه معادله را به شکل ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$$

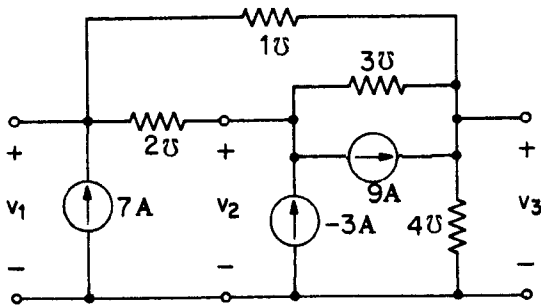
با استفاده از روش کرامر ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ ، از رابطه ماتریسی اخیر محاسبه می‌شوند:

$$v_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}} = 1V$$

$$v_2(t) = 2V$$

$$v_3(t) = 3V$$

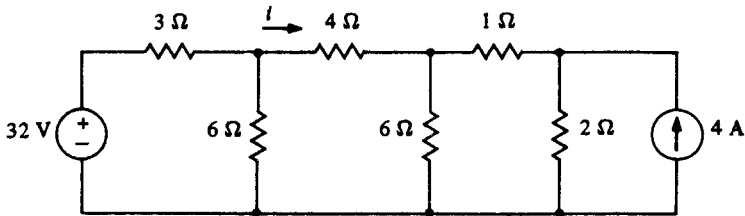
تمرین (۵-۳): مدار الکتریکی در شکل (۱۵-۳) دارای سه گره (بدون گره مبنا) می‌باشد. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ را بیابید.



شکل (۱۵-۳): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۳)

جواب: $v_1(t) = 2V$ ، $v_2(t) = -1V$ ، $v_3(t) = 1V$

تمرین (۳-۶): با استفاده از روش تحلیل گره، جریان $i(t)$ در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۱۶) بیابید.



شکل (۳-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۶)

جواب: $i(t) = 2A$

۳-۳-۲- معادلات گره در مدارهای با منابع وابسته

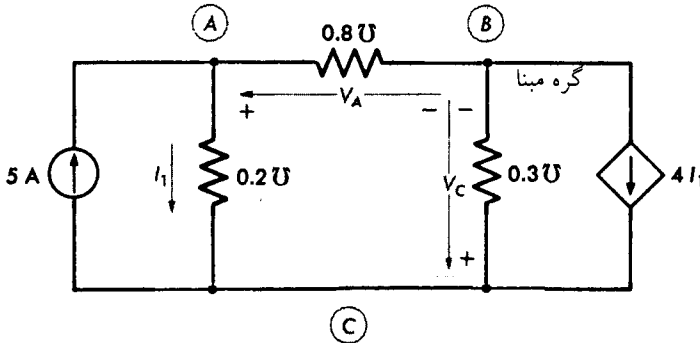
مشابه آنچه که در بخش (۳-۲-۲) معادلات مش را با وجود منابع وابسته حل نمودیم، در این بخش نیز می‌خواهیم معادلات گره را با وجود منابع وابسته مورد بررسی قرار دهیم. روند تحلیل این نوع مدارها مشابه روند ارائه‌شده در بخش موردنظر می‌باشد که مراحل آن در زیر نیز آمده است:

- ۱- ابتدا برای مدار موردنظر، معادلات گره را برای تمام گره‌های مدار (بجز گره مبنا) و با وجود منابع وابسته (و مشابه با منابع مستقل) می‌نویسیم. برای بیان راحت‌تر قانون KCL در گره، مناسب است تا منابع ولتاژی به منابع معادل جریانی تبدیل شوند.
- ۲- سپس برای تمام منابع وابسته در مدار، معادلات مقیدساز هر یک از این منابع را به‌عنوان معادلات اضافی به دسته معادلات ایجاد شده در مرحله اول اضافه می‌کنیم.
- ۳- مجموعه معادلات مراحل اول و دوم را در کنار هم قرار داده و مجهولات این دسته معادلات را حل می‌کنیم.

نکته مهم دیگری که در روش تحلیل گره وجود دارد آن است که اگر در یک گره‌ای، منبع ولتاژی بین آن گره با گره مبنا وجود داشته باشد، دیگر برای آن گره، معادله مربوط به قانون KCL را نمی‌نویسیم، زیرا هدف از روش گره آن است که ولتاژ گره‌ها را بیابیم که در این وضعیت، ولتاژ گره موردنظر توسط منبع ولتاژ موردنظر، مشخص شده است. همچنین اگر منبع ولتاژی به‌عنوان یک شاخه بین دو گره اصلی (غیر از گره مبنا) باشند لازم است که برای آن شاخه، یک جریان فرض شود و قانون KCL را برای هر دو گره بنویسیم. بعلاوه با توجه به آنکه یک مجهول به‌عنوان متغیر جریان منبع ولتاژ به متغیرهای

معادلات گره اضافه شده است، لذا به یک معادله دیگر نیاز داریم. این معادله از تفاضل ولتاژ دو گره و مساوی قرار دادن آن با مقدار منبع ولتاژ موردنظر به دست می‌آید. در مثال‌های بعدی این موارد را بیشتر توضیح خواهیم داد.

مثال (۷-۳): مدار الکتریکی در شکل (۱۷-۳) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ مقاومت با رسانایی 0.8U را بیابید. فرض کنید که گره B به عنوان گره مبنا باشد.



شکل (۱۷-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۳)

حل: با توجه به آنکه گره B به عنوان گره مبنا اختیار شده است، لذا قانون KCL را برای دو گره A و C می‌نویسیم. در این حالت، منبع جریان وابسته را مشابه منابع مستقل در نظر می‌گیریم.

$$\text{گره A: } 5 = (0.8 + 0.2) \cdot V_A - 0.2 \times V_C$$

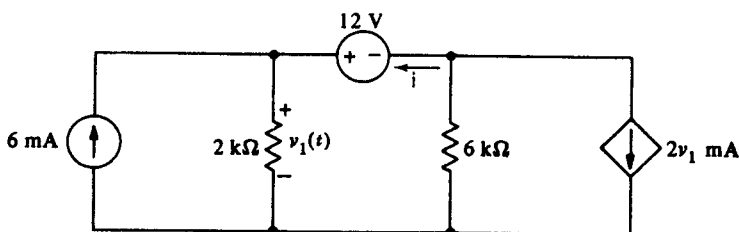
$$\text{گره C: } -5 + 4I_1 = -0.2 \times V_A + (0.2 + 0.3) \cdot V_C$$

دو معادله اخیر دارای ۳ متغیر مجهول می‌باشد؛ پس نیاز به معادله سوم می‌باشد. این معادله از رابطه مقید شده مربوط به منبع کنترل وابسته به دست می‌آید:

$$I_1 = (V_A - V_C) \times 0.2$$

حال با حل این سه معادله اخیر ولتاژ V_A را با روش کرامر به دست آورده که برابر $V_A = 5\text{V}$ می‌شود. این ولتاژ، همان ولتاژ دو سر مقاومت با رسانایی 0.8U است؛ زیرا سر دیگر این مقاومت، به زمین متصل شده است.

مثال (۸-۳): با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ v_1 را در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۸-۳) بیابید.



شکل (۳-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۸)

حل: این مدار دارای دو گره (بدون گره مبنا) است که بین این دو گره یک منبع ولتاژ ۱۲۷ وجود دارد. بدین منظور یک جریان i برای این منبع در نظر گرفته می‌شود. پس قانون KCL را برای این دو گره می‌نویسیم:

$$6 \times 10^{-3} = \frac{1}{2 \times 10^3} v_1 - i$$

$$-2v_1 \times 10^{-3} = \frac{1}{6 \times 10^3} v_2 + i$$

این دو معادله با سه متغیر مجهول همراه خواهد بود. با توجه به اینکه منبع ولتاژ ۱۲۷ بین دو گره ۱ و ۲ قرار گرفته است، لذا معادله سوم از تفاضل ولتاژ بین دو گره و تساوی آن با ولتاژ منبع ۱۲۷ به‌دست می‌آید. یعنی،

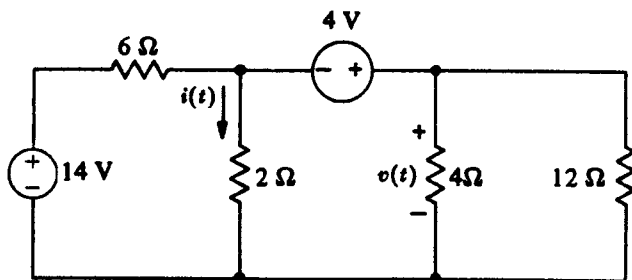
$$v_1 - v_2 = 127$$

حال از سه معادله اخیر، خواهیم داشت:

$$v_1 = 3V$$

$$v_2 = -9V$$

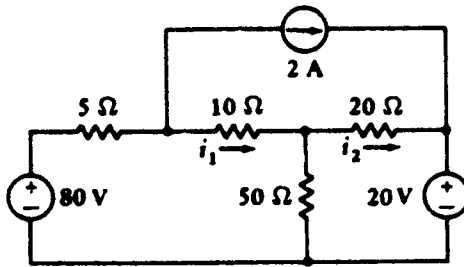
تمرین (۳-۷): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۱۹) را با استفاده از روش تحلیل گره حل نموده و مقادیر متغیرهای i و v مشخص شده در شکل را بیابید.



شکل (۳-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۷)

جواب: $v = 5V$ ، $i = -0.5A$

تمرین (۳-۸): شکل (۳-۲۰) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. با استفاده از روش تحلیل گره، جریان‌های i_1 و i_2 را بیابید.



شکل (۳-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۸)

راهنمایی و جواب: ابتدا منبع ولتاژ $80V$ با مقاومت 5Ω را به یک منبع معادل جریانی با جریان $16A$ و مقاومت موازی 5Ω تبدیل کنید. $i_1 = 7A/41$ و $i_2 = 44/41$

۳-۴- روش تحلیل جمع آثار

یکی دیگر از روش‌های حل مدارهای الکتریکی، روش جمع آثار^۱ می‌باشد. این روش در مدارهایی به کار می‌رود که علاوه بر خطی بودن، از چند منبع مستقل استفاده کرده باشد. در مدارهایی که شامل چندین منبع مستقل باشند، هر پاسخ مدار را می‌توان مجموع چندین مولفه دانست که هر مولفه آن، پاسخ مدار به یک منبع مستقل به تنهایی خواهد بود. اصل جمع آثار بیان می‌کند که برای تعیین جریان یا ولتاژ عنصری دلخواه از مدار با چندین منبع ورودی، می‌توان از جمع جبری تاثیرپذیری هر یک از منابع ورودی به تنهایی در متغیر دلخواه به دست آورد.

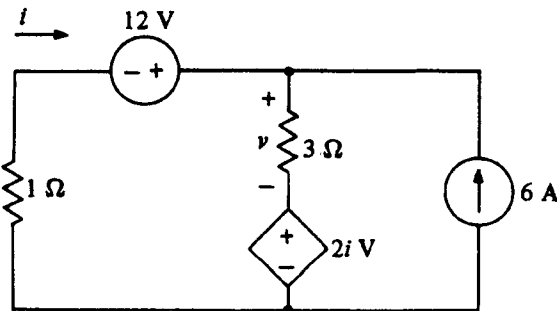
روال حل این روش بر این اساس است که ابتدا یک منبع مستقل مدار را به عنوان منبع ورودی در نظر گرفته و دیگر منابع مستقل را حذف می‌کنیم. سپس با حل این مدار، مقدار متغیر مجهول را به دست می‌آوریم. این کار را برای تک تک منابع مستقل انجام می‌دهیم. سپس جواب‌های به دست آمده برای متغیر مجهول موردنظر را در حل مدار با هم جمع جبری می‌کنیم. به عبارت دیگر، پاسخ کامل مدار از جمع جبری پاسخ‌های ناشی از اعمال

^۱- Superposition Method

هر یک از منابع مستقل به‌طور جداگانه به‌دست می‌آید. البته اگر منابع وابسته‌ای در مدار وجود داشتند، می‌باید این منابع را در تک‌تک مدارهای مورد نظر در نظر گرفت. به عبارت دیگر، روش جمع‌آثار با منابع وابسته هیچ کاری ندارد و اثر آنان در تمام مدارها در نظر گرفته می‌شود.

لازم به ذکر است که اگر بخواهیم منبع ولتاژی را حذف کنیم باید دو سر آن را اتصال کوتاه کنیم. یعنی بی‌اثر شدن منبع ولتاژ در مدارهای الکتریکی با صفر شدن مقدار آن منبع مهیا می‌شود و این کار هم با اتصال کوتاه شدن دو سر آن امکان‌پذیر است. همچنین اگر بخواهیم منبع جریانی را حذف کنیم و آن را در مدار، بی‌تاثیر کنیم باید مقدار جریان تولیدی آن منبع جریانی، صفر شود. این کار با اتصال باز شدن (قطع شدن) منبع جریانی از مدار، امکان‌پذیر خواهد بود.

مثال (۳-۹): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۱) را در نظر بگیرید. در این مدار، ولتاژ v را با استفاده از روش تحلیل جمع‌آثار بیابید.



شکل (۳-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۹)

حل: در ابتدا می‌خواهیم مقدار متغیر ولتاژ v موردنظر را ناشی از منبع ولتاژ ورودی ۱۲V مورد بررسی قرار دهیم. لذا باید اثر منبع مستقل جریانی را حذف کنیم. این مدار در شکل (۳-۲۲-الف) نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ v_1 معرف اثر منبع ولتاژ مستقل ۱۲V در ولتاژ دو سر مقاومت 3Ω است. برای تعیین v_1 از روش تحلیل مش استفاده می‌کنیم؛ یعنی قانون KVL را برای مدار می‌نویسیم:

$$12 = (3 + 1) \cdot i_1 + 2 \times i_1$$

در نتیجه:

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2A$$

با معلوم شدن جریان حلقه، ولتاژ v_1 برابر خواهد بود با:

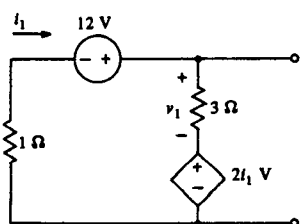
$$v_1 = 3 \times 2 = 6V$$

حال در مرحله دوم حل، اثر منبع مستقل جریانی در ولتاژ دو سر مقاومت 3Ω را محاسبه می‌کنیم. این ولتاژ را با v_2 نشان می‌دهیم که مدار آن در شکل (۳-۲۲-ب) مشخص شده است. همان‌گونه که در این مدار مشخص شده است، با اتصال کوتاه شدن منبع مستقل ولتاژی $12V$ ، اثر آن در مدار، حذف می‌شود. برای تعیین ولتاژ v_2 در شکل (۳-۲۲-ب) از روش تحلیل مش استفاده می‌کنیم؛ زیرا جریان حلقه دوم (که در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود) برابر $-6A$ می‌باشد. لذا فقط قانون KVL را برای حلقه سمت چپ می‌نویسیم:

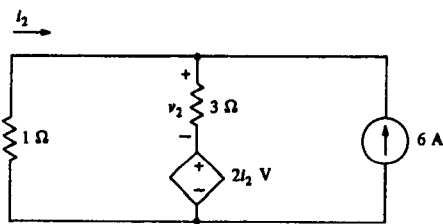
$$(1+3) \cdot i_2 - 3(-6) + 2 \times i_2 = 0$$

با حل این معادله داریم:

$$i_2 = -3A$$



(الف)



(ب)

شکل (۳-۲۲): روش تحلیل جمع‌آثار؛ الف) اثر منبع ولتاژ مستقل؛

ب) اثر منبع جریان مستقل

حال جریان عبوری از مقاومت 3Ω برابر است با:

$$i_{3\Omega} = -3 - (-6) = 3A$$

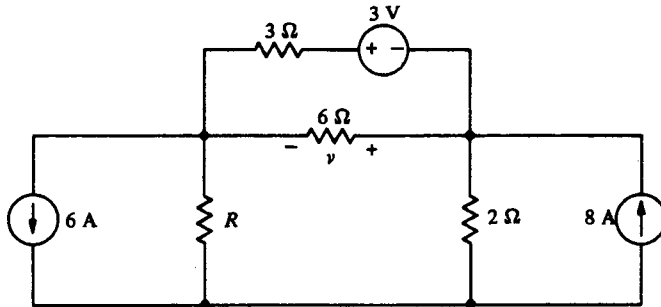
لذا ولتاژ v_2 برابر خواهد بود با:

$$v_2 = 3 \times i_{3\Omega} = 3 \times 3 = 9V$$

حال برای تعیین ولتاژ v در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۲۱)، کافی است که ولتاژهای v_1 و v_2 را با هم جمع کنیم.

$$v = v_1 + v_2 = 6 + 9 = 15V$$

تمرین (۳-۹): مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۳) را در نظر بگیرید. اگر در این مدار، $R = 2\Omega$ باشد، با استفاده از روش جمع آثار، ولتاژ v را بیابید.



شکل (۳-۲۳): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۹)

جواب: $v = 4 + \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{16}{3} = 8V$

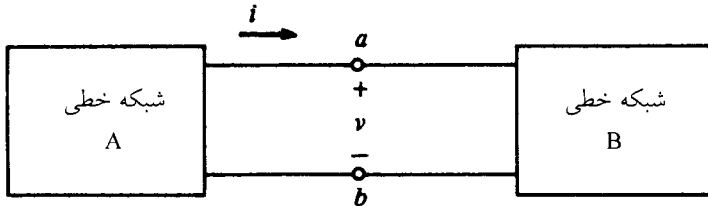
۳-۵- روش حل با استفاده از قضایای تونن و نورتن

در بخش (۲-۴) مدار معادل تونن و نورتن را برای منابع الکتریکی بیان نمودیم. در آن بخش دریافتیم که چگونه می‌توان منابع جریان را به منابع معادل ولتاژی تبدیل کرد و یا برعکس، منابع ولتاژ را با منابع معادل جریانی جایگزین نماییم. در این بخش می‌خواهیم مفاهیم ارائه‌شده در آن بخش را به مدارهای بزرگ‌تر گسترش دهیم که این موضوع تحت عنوان قضایای تونن و نورتن^۱ بیان می‌شود.

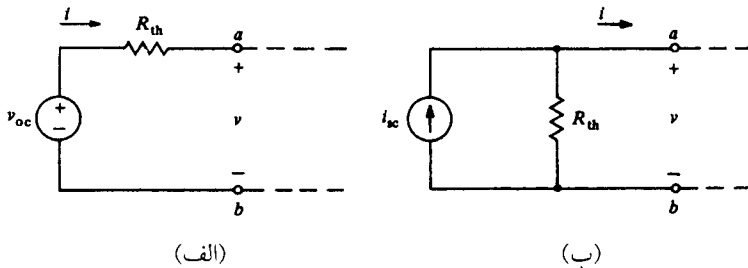
برای بیان این دو قضیه و دلیل کاربرد آن، فرض کنید که مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۳-۲۴) را به دو بخش مدار A و مدار B تقسیم کنیم. حال می‌خواهیم مدار الکتریکی A را ساده نموده و اجزای آن را به صورت یک منبع ولتاژ سری با مقاومت، و یا یک منبع جریان موازی با مقاومت تبدیل نماییم. لازمه این کار آن است که مدار الکتریکی A، از اعضای خطی تغییرناپذیر با زمان، تشکیل شده باشد. این دو نوع ساده‌سازی بر اساس قضایای تونن و نورتن بیان می‌شود. قضیه تونن بیان می‌کند که هر مدار خطی متشکل از مقاومت‌ها و منابع را می‌توان به یک مدار معادل تبدیل نمود که از سری شدن یک منبع ولتاژ با یک مقاومت تشکیل می‌گردد که در شکل (۳-۲۵-الف) نشان داده شده است. همچنین با

^۱ - Thevenin and Norton's Theorems

استفاده از قضیه نورتن می‌توان این مدار خطی را با یک منبع جریان موازی شده با یک مقاومت، معادل‌سازی نمود که در شکل (۳-۲۵) ب) مشخص شده است. یکی از این دو مدار، جایگزین مدار خطی A در شکل (۳-۲۴) خواهد شد.



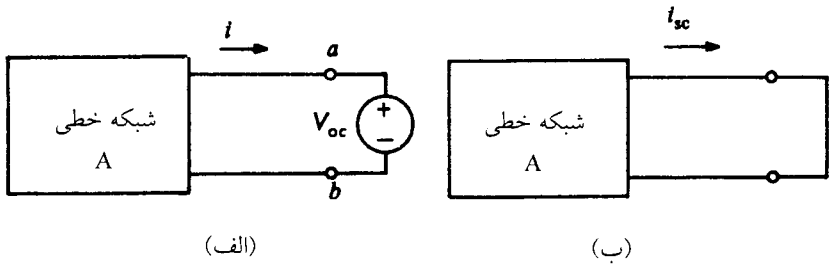
شکل (۳-۲۴): تقسیم مدار به دو بخش A و B



شکل (۳-۲۵): (الف) مدار معادل هم‌ارز تونن؛ (ب) مدار معادل هم‌ارز نورتن

حال می‌خواهیم نحوه محاسبه مقادیر R_{th} و v_{oc} را در مدار معادل هم‌ارز تونن و مقادیر R_{th} و i_{sc} را در مدار معادل هم‌ارز نورتن بیان کنیم. بدین منظور ابتدا مدار B را از مدار خطی A از دو سر a و b جدا می‌کنیم و فقط مدار خطی A را در نظر می‌گیریم. پارامترهای موردنظر را از دو آزمایش مدار باز و مدار اتصال کوتاه تعیین می‌کنیم. در آزمایش مدار باز ارائه‌شده در شکل (۳-۲۶) الف) فرض می‌کنیم که در دو سر a و b، یک منبع ولتاژ مجهول قرار می‌دهیم که با v_{oc} نشان می‌دهیم. این منبع ولتاژ v_{oc} از دو سر a و b با مدار خطی A موازی می‌شود. اکنون با حل این مدار (با یکی از روش‌های حل مش، گر یا جمع آثار)، ولتاژ مدار باز v_{oc} به‌دست می‌آید. در آزمایش مدار اتصال کوتاه که در شکل (۳-۲۶) ب) نشان داده شده است، دو سر a و b را به هم به‌طور مستقیم وصل می‌کنیم. سپس با تحلیل مدار، جریان عبوری از این اتصال محاسبه می‌شود. حال برای محاسبه R_{th} از تقسیم ولتاژ مدار باز v_{oc} بر جریان مدار اتصال کوتاه i_{sc} استفاده می‌کنیم. یعنی:

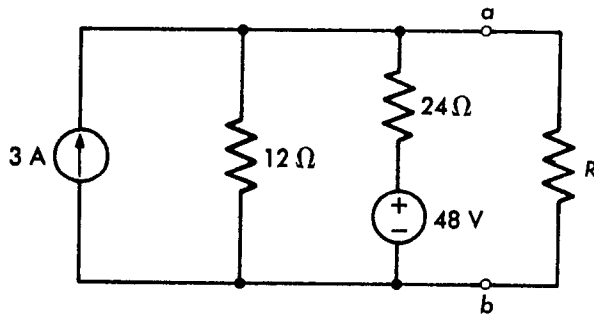
$$R_{th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} \quad (۳-۲۲)$$



شکل (۳-۲۶): (الف) آزمایش مدار باز؛ (ب) آزمایش مدار اتصال کوتاه

راه دیگر محاسبه R_{th} برای معادل‌سازی مدار خطی A، آن است که کلیه منابع مستقل در مدار خطی A را حذف نموده و امپدانس معادل دیده شده از دو سر a و b را برای مدار خطی A محاسبه می‌کنیم. این روند را می‌توان در مثال زیر مشاهده نمود.

مثال (۳-۱۰): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۲۷) ابتدا مدار هم‌ارز تونن از مدار سمت چپ دو سر a و b را بیابید. سپس مقدار R را به گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان مصرفی را در آن داشته باشیم.



شکل (۳-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۳-۱۰)

حل: در مدار موردنظر، از آنجا که مقاومت R مورد مطالعه است، لذا آن را به عنوان شبکه B در نظر گرفته و بقیه مدار در سمت چپ دو سر a و b را به عنوان شبکه خطی A در نظر می‌گیریم. حال ابتدا باید هم‌ارز معادل تونن برای شبکه A (دیده شده از دو سر a و b) را بیابیم. برای رسیدن به این هدف، از دو آزمایش مدار باز و مدار اتصال کوتاه استفاده می‌کنیم که این دو مدار بترتیب در شکل‌های (۳-۲۸-الف) و (۳-۲۸-ب) نشان داده شده است. برای به دست آوردن ولتاژ V_{oc} در مدار ارائه شده در شکل (۳-۲۸-الف)، از روش تحلیل گره استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$۲ + ۳ = \frac{1}{۱۲} v_{oc} + \frac{1}{۲۴} v_{oc}$$

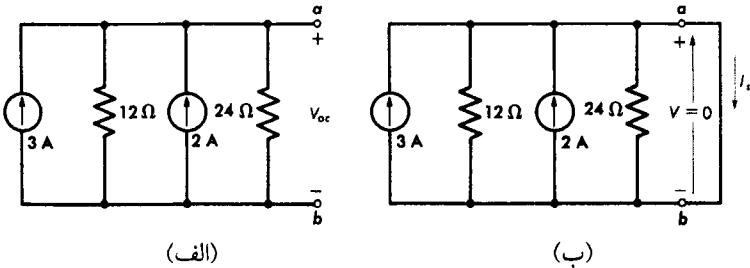
$$v_{oc} = ۴۰V$$

حال برای محاسبه i_{sc} کافی است که دو سر a و b را مطابق با شکل (۳-۲۸-ب) اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از آن را (یعنی i_{sc}) محاسبه کنیم. در این مدار با توجه به آنکه با اتصال کوتاه شدن دو سر a و b ، دو سر مقاومت‌های ۲۴Ω و ۱۲Ω به هم وصل می‌شوند، لذا از آنها جریانی عبور نمی‌کند. پس با استفاده از قانون KCL در گره مدار خواهیم داشت:

$$۲ + ۳ = i_{sc} \Rightarrow i_{sc} = ۵A$$

با محاسبه v_{oc} و i_{sc} ، مقدار R_{th} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{۴۰}{۵} = ۸\Omega$$



شکل (۳-۲۸): (الف) آزمایش مدار باز؛ (ب) آزمایش مدار اتصال کوتاه

در نتیجه مدار ارائه شده در شکل (۳-۲۹)، هم‌ارز تونن مدار را به همراه مقاومت R نشان می‌دهد. حال برای تعیین مقدار R به گونه‌ای که توان مصرفی آن حداکثر گردد، ابتدا رابطه توان مصرفی در مقاومت R را می‌یابیم. برای این منظور با استفاده از قانون KVL جریان مدار را تعیین می‌کنیم.

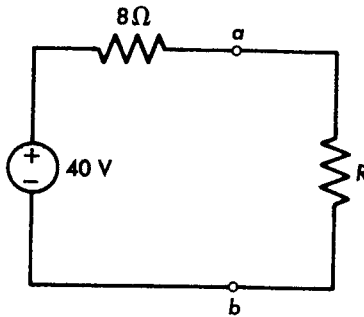
$$۴۰ = (۸ + R)I$$

$$I = \frac{۴۰}{۸ + R}$$

توان مصرفی در مقاومت R برابر است با:

$$P_R = R \cdot I^2 = R \left(\frac{۴۰}{۸ + R} \right)^2 = \frac{۱۶۰۰R}{(۸ + R)^2}$$

برای تعیین مقدار R متناسب با حداکثر توان مصرفی باید dP_R/dR را محاسبه نموده و مساوی صفر قرار دهیم. لذا،



شکل (۳-۲۹): مدار هم‌ارز تونن معادل با شکل (۳-۲۷)

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{160 \cdot (\lambda + R)^2 - 2(\lambda + R)160 \cdot R}{(\lambda + R)^4} = 0$$

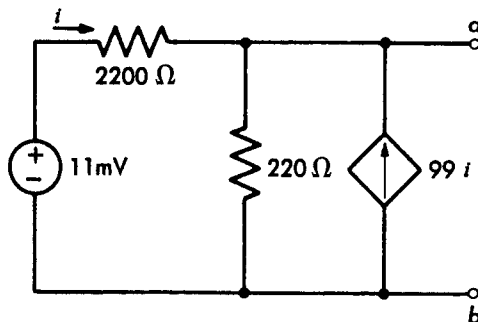
از حل این معادله اخیر، مقدار R برابر 8Ω به دست می‌آید. پس به ازای این مقاومت، حداکثر توان مصرفی در آن ایجاد می‌شود. برای تعیین مقدار حداکثر توان مصرفی، کافی است که در مدار شکل (۳-۲۹) مقدار R را برابر 8Ω انتخاب نموده و ابتدا جریان مدار را بیابیم:

$$I_{\max} = \frac{40}{\lambda + \lambda} = 2/5 \text{ A}$$

سپس توان حداکثر در مقاومت $R = 8\Omega$ برابر است با:

$$P_{R,\max} = R \cdot I_{\max}^2 = 8 \times 2/5^2 = 50 \text{ W}$$

تمرین (۳-۱۰): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۳۰) مفروض است. در این مدار، هم‌ارز تونن مدار را از دو سر a و b بیابید.



شکل (۳-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱۰)

جواب: $R_{th} = 20\Omega$ ، $i_{sc} = 0/5 \text{ mA}$

۳-۶- خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل، اصول کلی روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی خطی تغییرناپذیر با زمان را بیان نمودیم. چهار روش اساسی در تحلیل این نوع مدارها، روش‌های تحلیل مش، گره، جمع‌آثار و روش هم‌ارز تونن و نورتن می‌باشد. خلاصه مطالب این روش‌ها به صورت موارد زیر ارائه می‌گردد:

- در روش تجزیه و تحلیل مش، برای مدار الکتریکی با m مش، قانون KVL را برای m مش مدار می‌نویسیم. در نتیجه m معادله به دست می‌آید که متغیرهای آن، m جریان هر مش می‌باشد. با حل این معادلات، جریان این مش‌ها به دست می‌آید و سپس دیگر متغیرهای مدار قابل محاسبه خواهد بود.

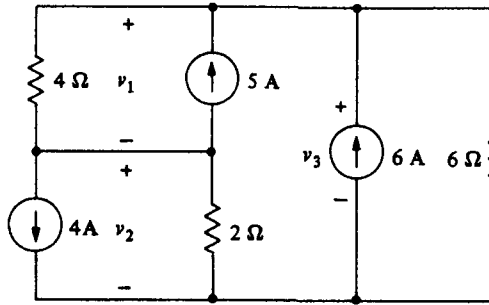
- روش تجزیه و تحلیل گره، بر مبنای نوشتن معادلات KCL برای n گره از $n+1$ گره مدار می‌باشد؛ زیرا در این روش باید یک گره به عنوان گره مبنا در نظر گرفته شود. با حل n معادله به دست آمده از اجرای قانون KCL برای n گره، ولتاژ تمام گره‌های مدار محاسبه می‌شوند.

- یکی از روش‌های موثر در حل مدارهای خطی، استفاده از روش جمع‌آثار است. در این روش، پاسخ مدار به ازای تک تک منابع مستقل مدار محاسبه می‌شود. سپس پاسخ نهایی مدار از جمع جبری پاسخ مدار به ازای تک تک منابع به دست می‌آید. در این روش، برای بی‌اثر کردن منابع ولتاژی، باید دو سر آن اتصال کوتاه شود. همچنین برای بی‌اثر بودن منابع جریانی، باید دو سر آن باز شده و به عبارت دیگر، از مدار، قطع گردد.

- در بعضی از روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی، مناسب است تا قسمتی از مدار که از اهمیت کمتری برخوردار است، تا حد امکان ساده گردد. در این حالت، از مدارهای هم‌ارز تونن و نورتن استفاده می‌شود. در روش هم‌ارز تونن، مدار معادل به صورت یک منبع ولتاژ v_{oc} سری با یک مقاومت R_{th} در می‌آید؛ در حالی که در روش هم‌ارز نورتن، مدار معادل از یک منبع جریان i_{sc} موازی با همان مقاومت R_{th} تشکیل می‌شود.

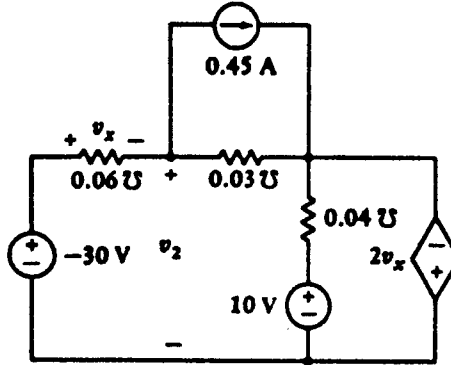
۳-۷- مسائل مروری

۱- با استفاده از روش تحلیل گره، متغیرهای v_1 و v_2 و v_3 را در مدار الکتریکی شکل (۳-۳۱) بیابید.



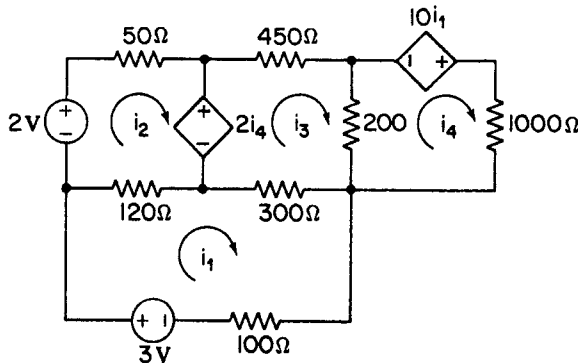
شکل (۳۱-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- با استفاده از روش تحلیل مش، ولتاژ v_x را در مدار شکل (۳۲-۳) تعیین کنید.



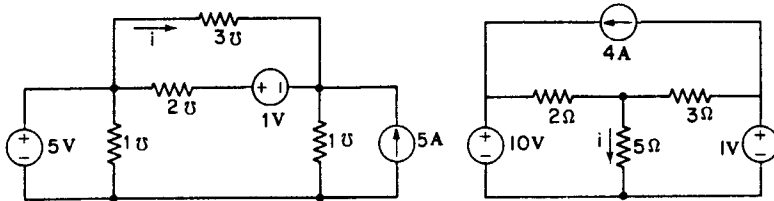
شکل (۳۲-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۳-۳) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل مش، جریان های i_1 تا i_4 را بیابید.



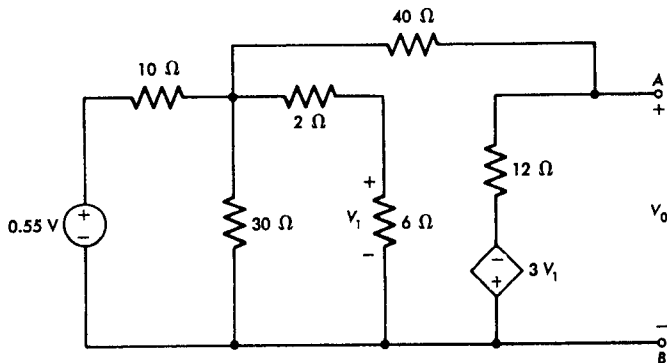
شکل (۳۳-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در دو مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۴-۳)، مقدار جریان i را از هر دو روش تحلیل مش و گره مشخص کنید.



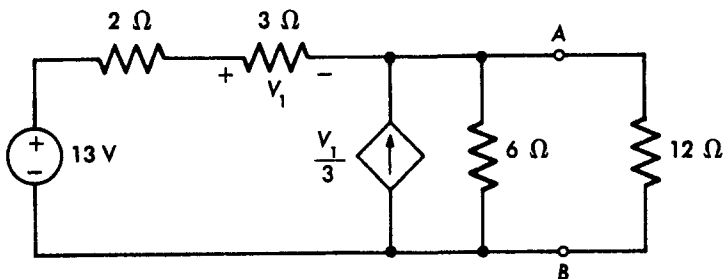
شکل (۳۴-۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۵-۳) با استفاده از روش تحلیل مش و گره ولتاژ v_o را تعیین کنید.



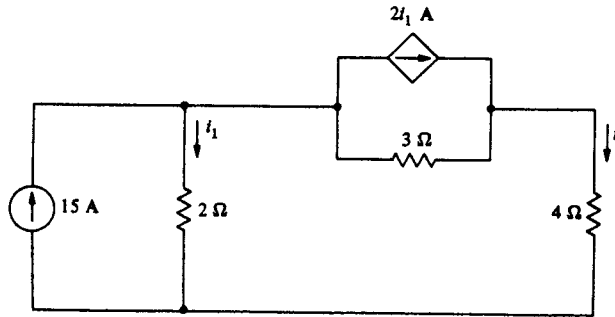
شکل (۳۵-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- شکل (۳۶-۳) مدار الکتریکی را نشان می دهد که در آن، با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ دو سر مقاومت 12Ω را بیابید.



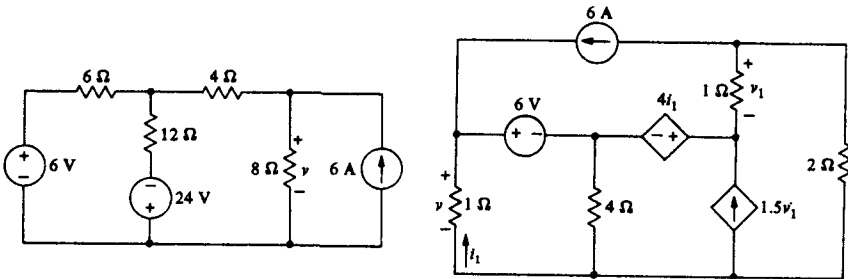
شکل (۳۶-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

۷- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳۷-۳) جریان i را از روش تحلیل گره بیابید.



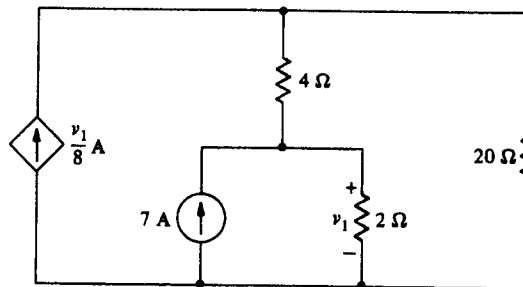
شکل (۳۷-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- مدارهای الکتریکی در شکل (۳۸-۳) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ v را در هر دو مدار بیابید.



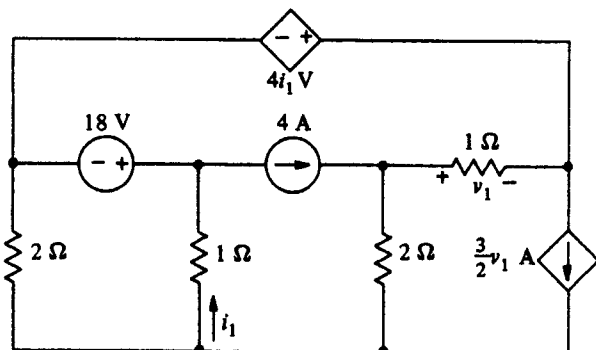
شکل (۳۸-۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- با استفاده از روش تحلیل گره مش، توان تلف شده در مقاومت 4Ω را در مدار الکتریکی شکل (۳۹-۳) تعیین کنید.



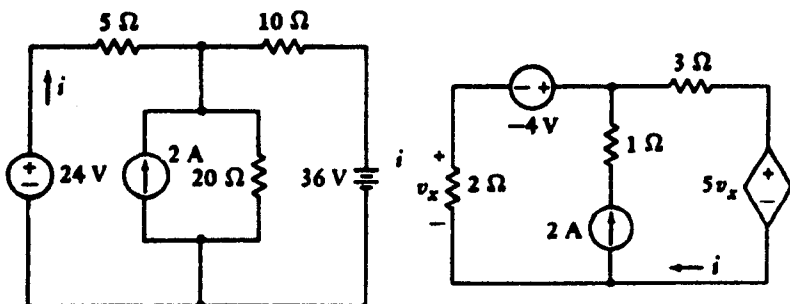
شکل (۳۹-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۴۰) ولتاژ v_1 را از روش تحلیل گره بیابید.



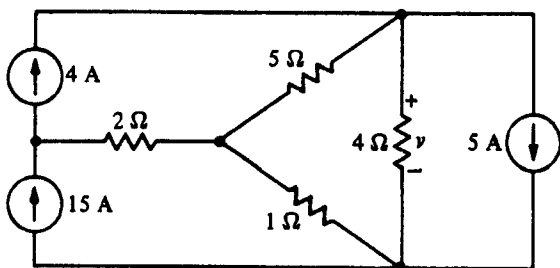
شکل (۳-۴۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱- در دو مدار ارائه شده در شکل (۳-۴۱) با استفاده از روش جمع آثار، جریان i را بیابید.



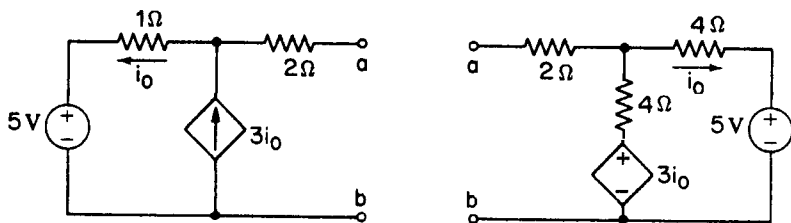
شکل (۳-۴۱): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)

۱۲- با استفاده از روش جمع آثار، مقدار ولتاژ v را در مدار الکتریکی شکل (۳-۴۲) بیابید.



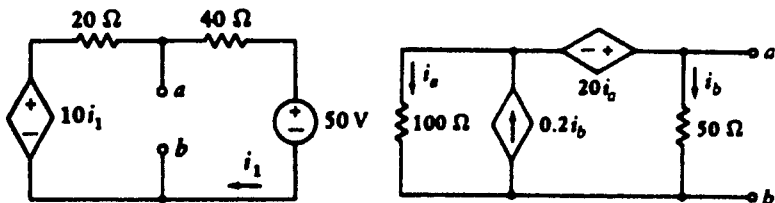
شکل (۳-۴۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۲)

۱۳- در شکل (۳-۴۳) دو مدار الکتریکی مشخص شده است. در این دو مدار، مدار هم‌ارز تونن را از دو سر a و b بیابید.



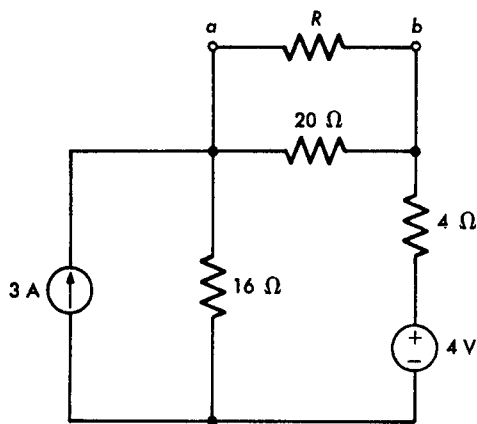
شکل (۳-۴۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۳)

۱۴- در دو مدار ارائه‌شده در شکل (۳-۴۴) مدار هم‌ارز تونن از دو سر a و b را بیابید.



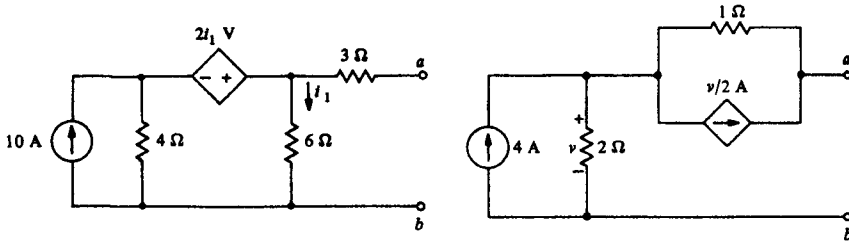
شکل (۳-۴۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۴)

۱۵- در شکل (۳-۴۵) یک مدار الکتریکی نشان داده شده است. با استفاده از مدار هم‌ارز تونن از دو سر a و b ، مقدار R را به‌گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان در مقاومت R تلف گردد. مقدار حداکثر توان تلفاتی چقدر خواهد بود.



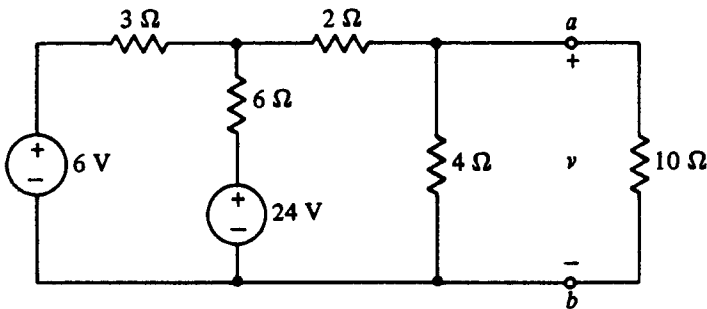
شکل (۳-۴۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۵)

۱۶- در مدارهای الکتریکی شکل (۴۶-۳) مدار هم‌ارز نورتن را از دو سر a و b بیابید.



شکل (۴۶-۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۶)

۱۷- مدار هم‌ارز تونن از دو سر a و b را برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۴۷-۳) تعیین کنید. سپس ولتاژ v را بیابید.



شکل (۴۷-۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۷)

فصل چهارم

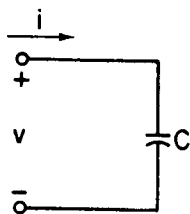
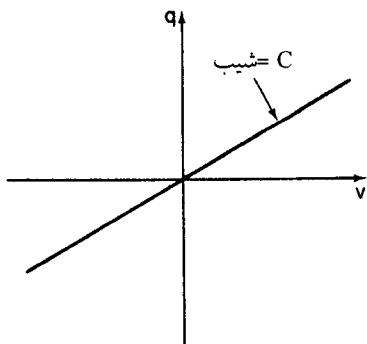
خازن‌ها و سلف‌ها

۴-۱- مقدمه

در فصل دوم و سوم، مدارهای الکتریکی از نوع مقاومتی را مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم. در این راستا ابتدا در فصل دوم، عناصر اساسی شبکه از قبیل مقاومت و منابع الکتریکی را بیان نمودیم. دیدیم که در عنصر مقاومت، بین متغیرهای ولتاژ و جریان آن، رابطه‌ای به نام قانون اهم وجود دارد. سپس در فصل سوم به تحلیل مدارهای الکتریکی مقاومتی پرداختیم و روش‌های اساسی حلقه و گره را در حل این مدارها ارائه نمودیم. در این فصل می‌خواهیم دو عنصر دو سر دیگر را به نام‌های خازن و سلف معرفی نماییم که خصوصیتی کاملاً متفاوت با عنصر دو سر مقاومت دارند. تفاوت عمده این دو عنصر با عنصر مقاومت در آن است که برخلاف عنصر مقاومت (که بین ولتاژ و جریان آن، یک رابطه خطی برقرار بود) بین متغیر ولتاژ و جریان آنها یک رابطه مشتق و یا انتگرالی وجود دارد؛ به عبارت دیگر، معادلات به صورت معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی است. حل این گونه مدارهای الکتریکی با وجود سلف‌ها و خازن‌ها به حل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی وابستگی خواهد داشت که متفاوت از حل معادلات جبری در مدارهای مقاومتی می‌باشد. البته در فصول بعدی، روش بسیار جالبی را ارائه خواهیم داد که در حالات خاصی (که بسیار هم متداول است) قادر خواهیم بود تا از خواص روش‌های حل مدارهای مقاومتی در این نوع مدارها هم استفاده کنیم که اصطلاحاً به روش تبدیل لاپلاس معروف است.

۲-۴- خازن الکتریکی

یکی دیگر از عناصری که به شکل وسیع در مدارهای الکتریکی به کار می‌روند، خازن‌های الکتریکی هستند. نمایش این خازن را می‌توان به صورت شکل (۱-۴) در نظر گرفت. این عنصر از دو صفحه موازی هم تشکیل شده است که با اعمال ولتاژ الکتریکی به این دو صفحه، مقداری بار الکتریکی بر روی این دو صفحه، ذخیره می‌شود. با افزایش میزان ولتاژ اعمالی به این خازن، بار الکتریکی ذخیره شده در آن نیز افزایش می‌یابد بیان معادلی که می‌توان در تعریف خازن بیان نمود آن است که: عنصری که در هر لحظه از زمان t ، میان بار الکتریکی ذخیره شده در آن (یعنی $q(t)$) با ولتاژ دو سر آن (یعنی $v(t)$)، رابطه‌ای در صفحه $v-q$ داشته باشد، خازن گفته می‌شود. حال اگر این رابطه، به صورت خطی باشد که از مبدأ صفحه $v-q$ بگذرد، یک خازن خطی نامیده می‌شود. شکل (۲-۴) یک خازن خطی را نشان می‌دهد. همچنین اگر این مشخصه با زمان نیز تغییر نکند، خازن خطی تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.



شکل (۱-۴): نمایش یک خازن الکتریکی شکل (۲-۴): مشخصه یک خازن خطی

لازم به ذکر است که در شکل (۱-۴)، مقدار $q(t)$ ، باری خواهد بود که در لحظه t در صفحه‌ای از خازن که جهت قراردادی جریان $i(t)$ به آن صفحه وارد می‌شود، قرار دارد. حال هنگامی که $i(t)$ مثبت است، بارهای مثبت به صفحه فوقانی که بار آن $q(t)$ است، وارد می‌شود و بالطبع، میزان تغییرات بار مذکور در واحد زمان (که همان $i(t)$ است) نیز مقدار مثبتی خواهد بود. به عبارت دیگر،

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1-4)$$

که در این رابطه، $q(t)$ بر حسب کولن و $i(t)$ بر حسب آمپر می‌باشد.

۳-۴- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

براساس شکل (۲-۴) و تعریفی که از خازن خطی تغییرناپذیر با زمان در بخش قبلی ارائه نمودیم، معادله مشخصه این نوع خازن را می‌توان به‌صورت زیر ارائه نمود:

$$q(t) = C \cdot v(t) \quad (۲-۴)$$

که در این رابطه، C ظرفیت خازن^۱ است که مستقل از زمان و ولتاژ اعمالی می‌باشد. ظرفیت خازن بیان می‌کند که با ولتاژ اعمالی مورد نظر و با توجه به مشخصات فیزیکی خازن، چه مقدار بار بر روی صفحات آن ذخیره شده است. واحد ظرفیت خازن را فاراد^۲ می‌نامیم و با علامت F نشان می‌دهیم.

با جایگزینی رابطه (۲-۴) در (۱-۴) و با در نظر گرفتن ثابت بودن ظرفیت خازنی C داریم:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (۳-۴)$$

حال اگر از رابطه اخیر از بازه صفر تا زمان t انتگرال‌گیری نماییم می‌توان نوشت:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (۴-۴)$$

که $v(0)$ ولتاژ اولیه خازن در زمان $t=0$ است؛ به عبارت دیگر، قبل از انتقال بار از منبع به خازن ($t < 0$)، روی صفحات خازن می‌تواند مقداری بار اولیه وجود داشته باشد (یعنی $q(0)$ که آن هم، معادل با ولتاژی معادل ولتاژ اولیه $v(0)$ خواهد بود).

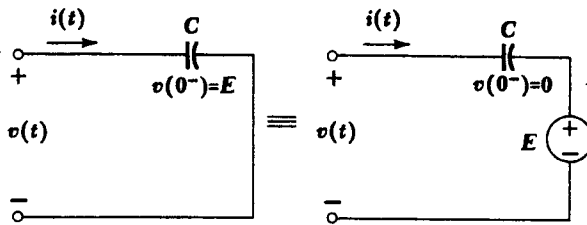
لازم به ذکر است که در بسیاری از مواقع، به جای متغیر $\frac{1}{C}$ از متغیر الاستانس^۳ استفاده می‌شود که با S نمایش می‌دهیم. بالطبع، واحد متغیر الاستانس را داراف (عکس کلمه فاراد) می‌نامیم و با حرف D نمایش می‌دهیم (همان‌گونه که عکس مقاومت R را با G نمایش داده و واحد آن را مهو نامیدیم).

همچنین معادله (۴-۴) نشان می‌دهد که برای زمان $t > 0$ ، ولتاژ دو سر خازن $v(t)$ از جمع ولتاژ اولیه خازن $v(0)$ در زمان $t=0$ ، و ولتاژ دو سر خازن با ظرفیت C و بدون ولتاژ اولیه تشکیل شده است. بنابراین، هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه $v(0)$ را می‌توان به‌صورت اتصال سری یک منبع ولتاژ DC با ولتاژ $E = v(0)$ و یک خازن با ظرفیت خازنی C و بدون ولتاژ اولیه در نظر گرفت. این موضوع را می‌توان در شکل (۳-۴) مشاهده نمود.

^۱ - Capacitance

^۲ - Farad

^۳ - Elastance



شکل (۴-۳): مدار معادل یک خازن با وجود ولتاژ اولیه

پارامترهای دیگری که باید برای عنصر خازن بیان کنیم، توان و انرژی الکتریکی در خازن خطی تغییرناپذیر با زمان است. عبور بار الکتریکی در خازن از ولتاژ بالاتر به ولتاژ پایین‌تر، یا از صفحه مثبت به صفحه منفی، حکایت از آن دارد که بخشی از انرژی الکتریکی مدار می‌تواند در این عنصر، ذخیره شود. توان الکتریکی تحویلی به این خازن را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

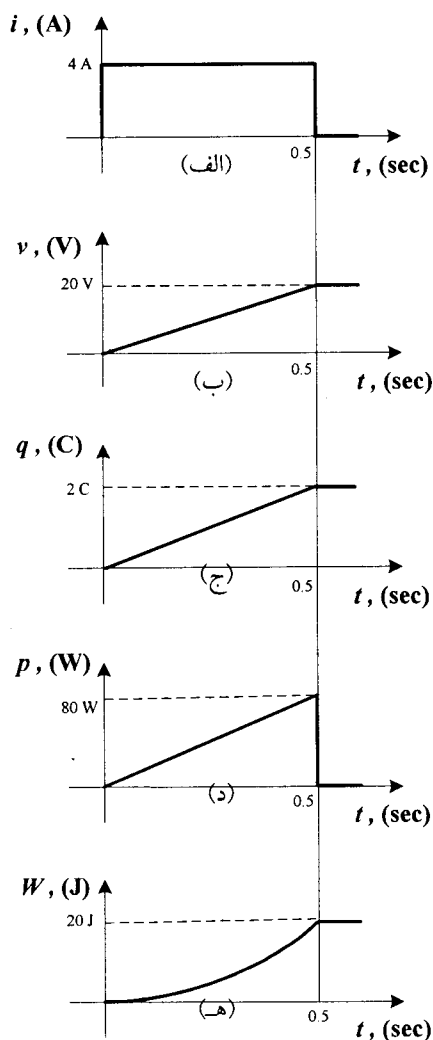
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = C \cdot v(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{W} \quad (4-5)$$

همچنین انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن برابر است با:

$$w(t) = \int p(t) dt = \int C \cdot v(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad \text{J} \quad (4-6)$$

پس می‌توان گفت که انرژی ذخیره شده در خازن، تنها به مقدار ولتاژ دو سر آن بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن ولتاژ، هیچ ربطی ندارد. لذا این انرژی، با کم شدن ولتاژ تا صفر، دوباره به مدار الکتریکی بر می‌گردد. یعنی اگر دو صفحه خازن مذکور از طریق یک مقاومت، به هم متصل شود، تا زمانی که انرژی ذخیره شده به طور کامل به صورت گرما و تلفات حرارتی در مقاومت ظاهر نشود، جریان الکتریکی در مدار برقرار خواهد بود. در این صورت، خازن همانند یک منبع ولتاژ عمل کرده و در مدار مورد نظر، یک جریان الکتریکی به راه می‌اندازد. افت ولتاژ روی مقاومت، باعث کاهش ولتاژ خازنی تا رسیدن ولتاژ به صفر می‌شود.

مثال (۴-۱): یک خازن الکتریکی با ظرفیت خازنی 0.1 F را در نظر بگیرید که به آن، یک جریان الکتریکی به صورت پالس و مطابق با شکل (۴-۴) اعمال می‌گردد. این جریان در مدت زمان از صفر تا 0.5 sec برابر 4 A بوده و پس از آن به مقدار صفر می‌رسد. برای این خازن، شکل موج ولتاژ $v(t)$ ، بار $q(t)$ ، توان $p(t)$ و انرژی ذخیره شده $w(t)$ را بر حسب زمان رسم کنید.

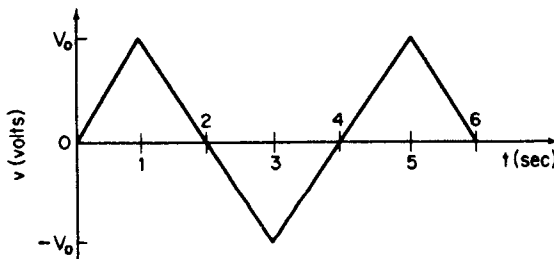


شکل (۴-۴): شکل موج‌های خازن مثال (۴-۱): (الف) جریان؛ (ب) ولتاژ؛ (ج) بار الکتریکی؛ (د) توان؛ (هـ) انرژی ذخیره شده

حل: این منحنی‌ها را می‌توان در شکل‌های (۴-۴-ب) تا (۴-۴-هـ) مشاهده نمود. مشخص است که ولتاژ الکتریکی از رابطه (۴-۴) با فرض $v(0) = 0$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر، با افزایش بار الکتریکی، ولتاژ دو سر خازن نیز زیاد می‌شود. همچنین بار الکتریکی که در شکل (۴-۴-ج) مشخص شده است، از رابطه $q(t) = Cv(t)$ به دست

می‌آید. توان و انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن نیز از روابط (۴-۵) و (۴-۶) محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که پس از اتمام پالس جریان، بار الکتریکی بر روی صفحات خازن باقی می‌ماند؛ لذا ولتاژ دو سر خازن، ثابت می‌ماند ولی توان دریافتی صفر شده و انرژی الکتریکی ذخیره شده در آن به مقدار ثابتی می‌رسد. لازم به ذکر است که $w(t)$ سطح زیر منحنی توان الکتریکی $p(t)$ است و بنابراین، حداکثر انرژی ذخیره شده در خازن را می‌توان از سطح زیر منحنی $p(t)$ به دست آورد که برابر $\frac{8 \times 10^{-5}}{2} = 4 \times 10^{-5} \text{ J}$ می‌باشد. همچنین با توجه به آنکه تغییرات توان، خطی می‌باشد، لذا تغییرات انرژی الکتریکی نیز به صورت یک تابع سهمی شکل در می‌آید.

تمرین (۴-۱): شکل موج ولتاژ اعمالی به یک خازن الکتریکی با ظرفیت C فاراد به صورت موج ارائه شده در شکل (۴-۵) می‌باشد. شکل موج تغییرات جریان و بار عبوری از یک خازن را بیابید.



شکل (۴-۵): ولتاژ اعمالی به یک خازن

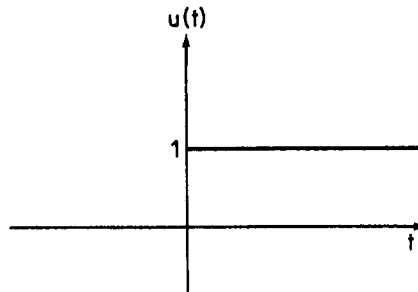
جواب: از روابط $i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$ و $q(t) = Cv(t)$ استفاده کنید.

۴-۴- بعضی توابع زمانی مورد نیاز

در فصول دوم و سوم که مدارهای مقاومتی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم، متوجه شدیم که بین ولتاژ و جریان دو سر عناصر، یک وابستگی زمانی وجود دارد. این وابستگی به وسیله یک سری معادلات جبری ایجاد می‌شد. اما براساس روابط (۴-۳) و (۴-۴) برای یک خازن، می‌بینیم که این ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان به صورت توابع دیفرانسیلی و انتگرالی است. بنابراین باید با توابع زمانی مختلف و خصوصیات مشتقات و انتگرال‌های این توابع آشنا شویم تا در بخش بعدی بتوانیم شکل موج‌های متغیرهای ولتاژ و جریان یک خازن را در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار دهیم.

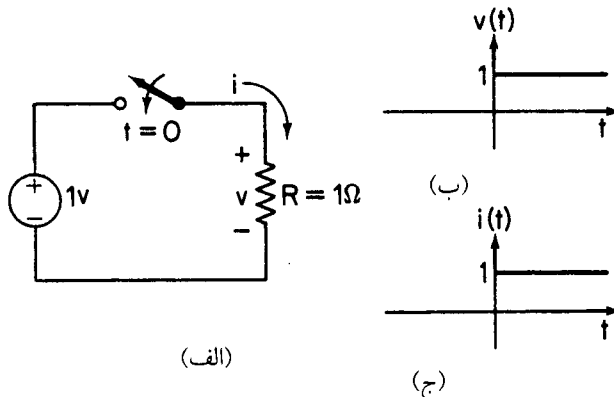
- تابع پله^۱: یکی از مهم‌ترین توابع مورد استفاده در مدارهای الکتریکی، تابع پله می‌باشد. این تابع که با $u(t)$ نمایش داده می‌شود و در شکل (۴-۶) هم قابل مشاهده است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۴-۷)$$



شکل (۴-۶): تابع پله واحد

در لحظه $t = 0$ ، مقدار این تابع را می‌توان صفر، $1/2$ یا ۱ در نظر گرفت که در بحث ما، این موضوع اهمیتی ندارد. این تابع را می‌توان از نوع ولتاژی و یا جریانی، توسط یک کلید و یک مدار الکتریکی ساده مطابق شکل (۴-۷-الف) ایجاد نمود. براساس این شکل، اگر منبع ولتاژ به مقدار ۱V باشد و در زمان $t = 0$ کلید در حالت وصل قرار گیرد، ولتاژ دو سر مقاومت در زمان $t > 0$ برابر ۱V می‌شود و با توجه به مقدار مقاومت $R = 1\Omega$ ، جریان ۱A از مقاومت عبور می‌کند که در شکل‌های (۴-۷-ب و ج) نشان داده شده است.



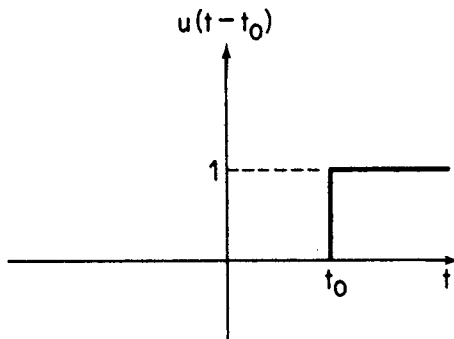
شکل (۴-۷): الف) مدار ایجاد ولتاژ و جریان پله؛ ب و ج) شکل مشخصه آنان

^۱ - Step Function

حال فرض کنید که یک تابع ورودی پله واحد به اندازه t_0 ثانیه به تأخیر افتد؛ در نتیجه مقدار شکل موج تابع در زمان t دارای دامنه‌ای برابر $u(t-t_0)$ خواهد بود. به عبارت دیگر، می‌توان نوشت:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t-t_0 < 0 \\ 1 & t-t_0 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (۸-۴)$$

که این تابع پله با زمان تأخیری t_0 ثانیه (یعنی $u(t-t_0)$) را می‌توان در شکل (۸-۴) مشاهده نمود.



شکل (۸-۴): تابع پله با تأخیر زمانی t_0

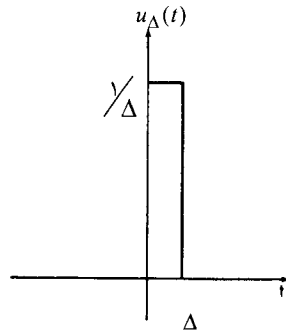
- تابع پالس: در بسیاری از مدارهای الکتریکی، از تابعی چهار گوش به نام تابع پالس^۱ $u_{\Delta}(t)$ استفاده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases} \quad (۹-۴)$$

همان‌گونه که در شکل (۹-۴) مشخص است، این تابع، پالسی به ارتفاع $1/\Delta$ و عرض Δ می‌باشد که از لحظه $t=0$ شروع شده و در زمان $t=\Delta$ خاتمه می‌یابد و سطح زیر منحنی این تابع برابر مقدار واحد است. تابع پالس را می‌توان از دو تابع پله به صورت زیر تشکیل داد:

$$u_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta} \quad (۱۰-۴)$$

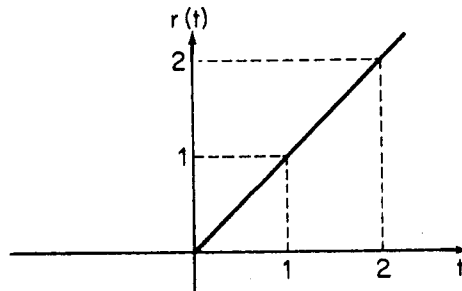
^۱ - Pulse Function



شکل (۹-۴): تابع پالس

- تابع شیب: یک تابع شیب^۱ واحد $r(t)$ ، در زمان $t=0$ شروع شده و با گذشت زمان، مقدار آن نیز به همان نسبت افزایش می‌یابد که این تابع در شکل (۱۰-۴) مشخص شده است. این تابع را برحسب تابع پله واحد می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$r(t) = t \cdot u(t) \quad (۱۱-۴)$$



شکل (۱۰-۴): نحوه تغییرات تابع شیب واحد

شکل دیگر نمایش تابع شیب واحد را می‌توان به صورت انتگرال یک تابع پله در نظر گرفت. یعنی؛

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (۱۲-۴)$$

و یا

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

^۱ - Ramp Function

- تابع ضربه: برای تشکیل یک تابع ضربه^۱ فرض کنید که در تابع پالس، عرض پالس به سمت صفر میل کرده و در عوض، دامنه آن به سمت بینهایت میل کند که در نتیجه، تابع پالس به سمت تابع ضربه میل می‌کند (البته در مفهوم دقیق ریاضی، این منحنی، یک تابع نخواهد بود). این تابع ضربه که با $\delta(t)$ مشخص می‌گردد، به شکل زیر تعریف می‌شود:

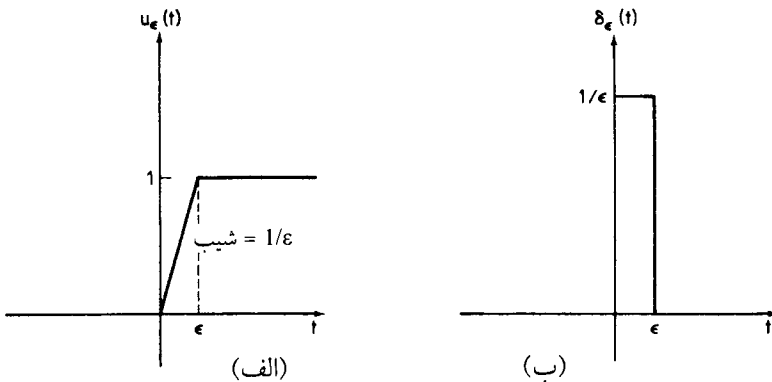
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases} \quad (۱۳-۴)$$

که ویژگی این تابع در زمان $t=0$ به گونه‌ای است که برای هر مقدار $\varepsilon > 0$ و خیلی کوچک می‌توان نوشت:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (۱۴-۴)$$

رابطه (۱۴-۴) را می‌توان با استفاده از تابع پالسی که سطح زیر آن، همواره برابر ۱ است نیز تعریف نمود.

برای درک بهتر این موضوع اگر تابع پله واحد را مطابق شکل (۴-۱۱-الف) تعریف کنیم، آنگاه تابع ضربه، معادل شکل (۴-۱۱-ب) خواهد بود که در آن، رابطه (۴-۱۴) صادق است.



شکل (۴-۱۱): تقریبی از تابع پله و تابع ضربه: الف) تابع پله؛ ب) تابع ضربه

اکنون از تعریف تابع پله و تابع ضربه می‌توان نتیجه گرفت که،

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (۱۵-۴)$$

و یا،

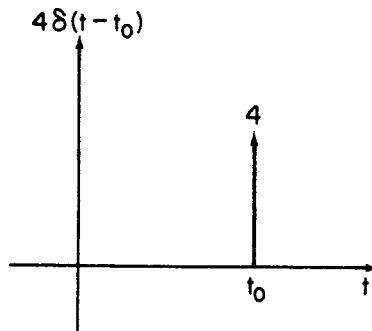
^۱ - Impulse Function

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (۱۶-۴)$$

دو معادله اخیر بسیار مهم هستند و در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده زیادی می‌شود. لازم به ذکر است که نمایش تابع ضربه $k \cdot \delta(t - t_0)$ ، تابعی است که در $t = t_0$ ، دارای سطح زیر منحنی به مقدار k می‌باشد. یعنی:

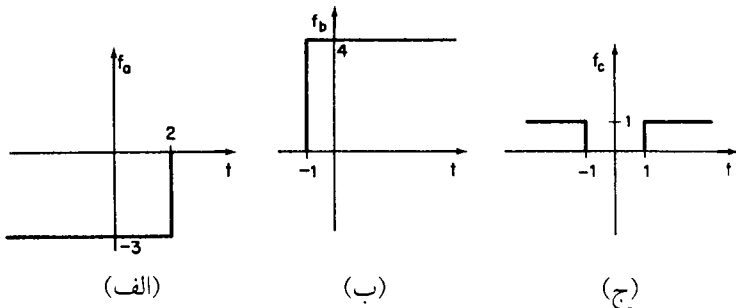
$$k \times \delta(t - t_0) = k \frac{d}{dt} u(t - t_0) \quad (۱۷-۴)$$

به عنوان نمونه در شکل (۱۲-۴) شکل تابع ضربه $۴ \times \delta(t - t_0)$ رسم شده است.



شکل (۱۲-۴): تابع ضربه با دامنه ۴ و تأخیر $t = t_0$

تمرین (۲-۴): بیان ریاضی شکل موج‌های ارائه شده در شکل (۱۳-۴) را مشخص نمایید.



شکل (۱۳-۴): بعضی توابع ریاضی

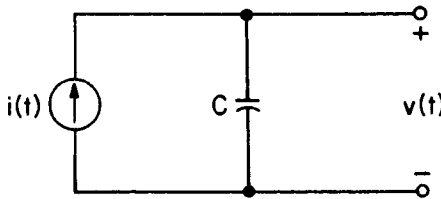
جواب: الف) $f_a(t) = -3u(-t + 2)$ ، ب) $f_b(t) = 4u(t + 1)$ ،

ج) $f_c(t) = u(t - 1) + u(-t - 1)$

۴-۵- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک خازن الکتریکی

در این بخش، می‌خواهیم اثرات تحریک یک خازن را در شکل موج‌های ولتاژ و جریان دو سر آن بررسی کنیم. این موضوع براساس توابع ارائه‌شده در بخش قبل می‌باشد. بدین منظور و مطابق با شکل (۴-۱۴) فرض کنید که یک خازن با یک منبع جریان $i(t)$ تغذیه شود. مقدار ولتاژ اندازه‌گیری شده دو سر خازن از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0) \quad t > 0 \quad (4-18)$$



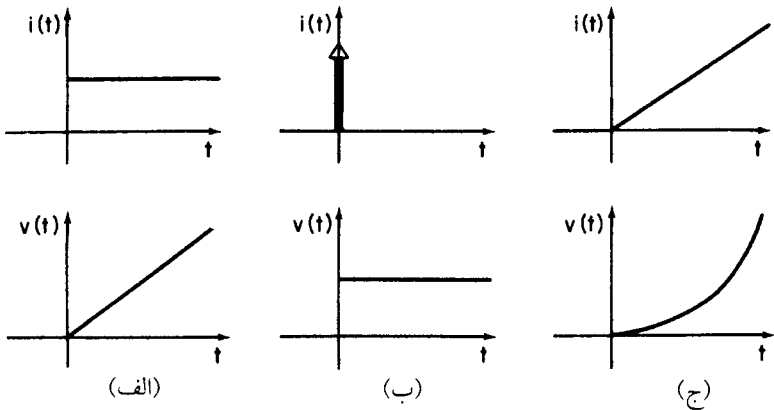
شکل (۴-۱۴): تحریک یک خازن با منبع جریان

این رابطه بیان می‌کند که اگر ورودی $i(t)$ ، یک جریان به شکل تابع پله باشد، ولتاژ دو سر خازن به صورت یک تابع شیب به اضافه ولتاژ اولیه $v(0)$ خواهد بود. به عبارت دیگر، قبل از اعمال جریان، ولتاژ دو سر خازن برابر $v(0)$ خواهد بود. به همین دلیل به $v(0)$ ، شرط اولیه (حالت اولیه) متغیر ولتاژ دو سر خازن می‌نامیم. اگر این ولتاژ اولیه برابر صفر باشد، آنگاه با اعمال جریان ثابت به شکل تابع پله، ولتاژ خروجی مطابق شکل (۴-۱۵-الف)، به صورت یک تابع شیب خواهد بود. همچنین اگر منبع جریان به صورت یک تابع ضربه باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن مطابق شکل (۴-۱۵-ب) به صورت یک تابع پله است و اگر منبع جریان به صورت یک تابع شیب باشد، ولتاژ به شکل یک تابع سهموی است که در شکل (۴-۱۵-ج) نشان داده شده است. این منحنی‌ها نشان می‌دهد که رابطه $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ در این سه حالت، صادق می‌باشد.

از منحنی‌های ارائه شده در شکل (۴-۱۵) درمی‌یابیم که برای اینکه شکل موج ولتاژ دو سر خازن به صورت یک تابع گسسته باشد (در حالت ب از شکل)؛ به گونه‌ای که مشتق آن با یک دامنه نامحدود باشد، باید منبع جریان به صورت یک تابع ضربه باشد. این موضوع، یک شرط بسیار مهم را در شکل موج ولتاژ دو سر خازن ارائه می‌کند که در زیر بیان می‌گردد:

شرط پیوستگی^۱ برای خازن‌ها: با توجه به آنکه در عمل نمی‌توان یک جریان ضربه ایجاد

^۱ - Continuity Condition



شکل (۴-۱۵): شکل موج‌های ولتاژ دو سر خازن با منابع جریان مختلف: (الف) منبع جریان پله؛ (ب) منبع جریان ضربه؛ (ج) منبع جریان شیب

نمود، لذا ولتاژ ظاهر شده در دو سر یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت یک تابع پیوسته است و نمی‌تواند دارای گسستگی باشد. به عبارت دیگر، تحت هیچ شرایطی، ولتاژ دو سر خازن به طور ناگهانی نمی‌تواند تغییر نماید.

این مطلب را می‌توان به شکل ریاضی هم بیان نمود. در صورتی که یک تابع $f(t)$ در لحظه $t = t_0$ پیوسته باشد، آنگاه با توجه به تعریف مقدار سمت چپ تابع یعنی $f(t_0^-)$ و مقدار سمت راست تابع یعنی $f(t_0^+)$ به صورت زیر

$$f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t), \quad t < t_0$$

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t), \quad t > t_0$$

می‌توان نوشت:

$$f(t_0^-) = f(t_0^+) = f(t_0)$$

حال برای یک خازن هم با توجه به پیوستگی ولتاژ دو سر آن در هر لحظه t_0 داریم:

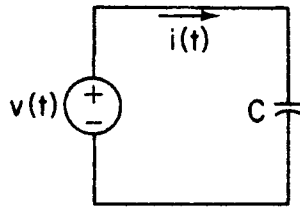
$$v_C(t_0^-) = v_C(t_0^+) = v_C(t_0)$$

در نتیجه، ولتاژ دو سر خازن در زمان $t > t_0$ ، علاوه بر اینکه به ولتاژ اولیه خازن در $t = t_0$ بستگی دارد، به مقدار جریان عبوری از خازن در زمان $t > t_0$ نیز بستگی دارد؛ یعنی:

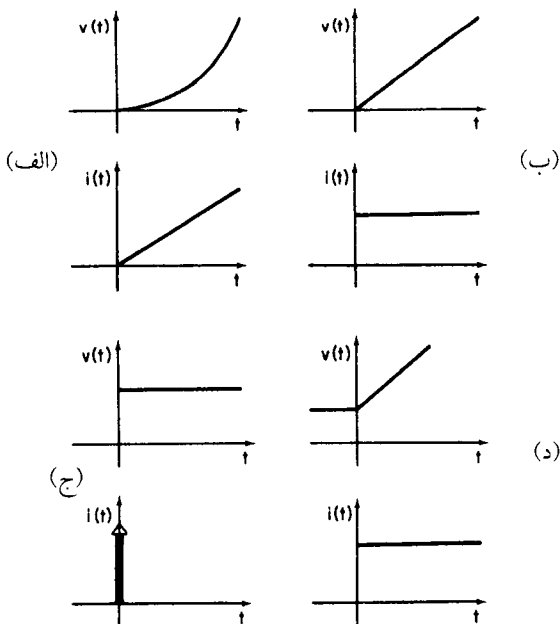
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (۴-۱۹)$$

که معمولاً در مدارهای الکتریکی، زمان اعمال منبع جریان را در زمان $t = 0$ در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، $t_0 = 0$ می‌باشد.

این مطالب را می‌توان به شکل دیگری هم بیان نمود. فرض کنید که یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، با یک منبع $v(t)$ تغذیه شود که در شکل (۴-۱۶) نشان داده شده است. حال برای آنکه جریان عبوری از خازن به صورت یک تابع شیب در آید، باید ولتاژ اعمالی به صورت شکل موج $v(t) = t^2 u(t)$ باشد که این موضوع را می‌توان در شکل (۴-۱۷-الف) مشاهده نمود. همچنین برای ولتاژهای ورودی تابع شیب، تابع پله با حالت اولیه صفر در $t < 0$ ، و تابع شیب با حالت اولیه ثابت غیر صفر در $t < 0$ در شکل‌های (۴-۱۷-ب تا د) جریان ایجاد شده در خازن رسم شده است. از بین این حالت‌ها، ایجاد حالت (ج) از نظر عملی و واقعی غیرممکن است؛ زیرا هیچ موقع نمی‌توان یک جریان ضربه با دامنه نامحدود را ایجاد نمود.



شکل (۴-۱۶): یک خازن با تحریک توسط یک منبع ولتاژ

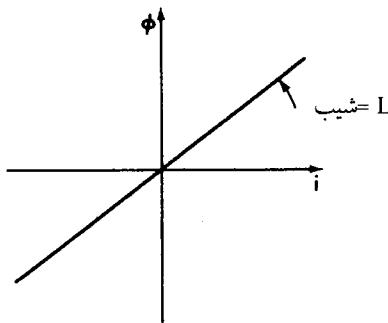


شکل (۴-۱۷): شکل موج‌های ولتاژ و جریان یک خازن با اعمال منابع ولتاژ مختلف

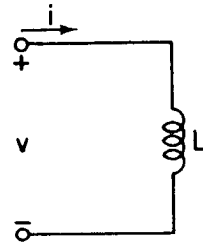
۴-۶- سلف‌ها

یکی دیگر از عناصری که کاربرد وسیعی در مدارهای الکتریکی دارند، سلف‌ها^۱ می‌باشند. یک سلف واقعی را می‌توان با پیچیدن یک سیم به شکل مارپیچی ایجاد نمود که برای افزایش ولتاژ دو سر سلف، یا باید جریان سیم‌پیچ را زیاد کرد و یا باید تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ را زیادتر نمود. نمایش این سلف را می‌توان به صورت شکل (۴-۱۸) در نظر گرفت.

به عبارت دیگر، بیان معادلی که می‌توان در تعریف یک عنصر دو سر به نام سلف بیان نمود، آن است که: عنصری که در هر لحظه از زمان t ، میان شار الکتریکی ایجاد شده $\phi(t)$ توسط سلف و جریان عبوری $i(t)$ از آن، رابطه‌ای در صفحه $\phi-i$ داشته باشد، سلف گفته می‌شود. حال اگر این رابطه به صورت خطی باشد که از مبدأ صفحه $\phi-i$ بگذرد، یک سلف خطی نامیده می‌شود که شکل (۴-۱۹)، یک سلف خطی را نشان می‌دهد. همچنین اگر این مشخصه با زمان نیز تغییر نکند، سلف خطی تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.



شکل (۴-۱۹): مشخصه یک سلف خطی



شکل (۴-۱۸): نمایش یک سلف

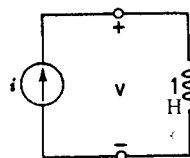
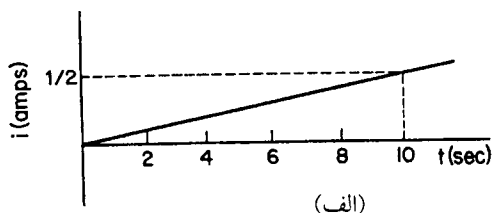
براساس تعریف مذکور در می‌یابیم که اگر از سلف، جریان $i(t)$ عبور کند، شاری به مقدار $\phi(t)$ توسط آن ایجاد می‌شود. براساس قانون القای فارادی، با تغییر شار ایجاد شده توسط سیم‌پیچ، ولتاژی در دو طرف آن ایجاد می‌شود. یعنی:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (۴-۲۰)$$

که در این رابطه، $\phi(t)$ شار الکتریکی برحسب وبر-دور (Wb-turn) و $v(t)$ ولتاژ الکتریکی برحسب ولت می‌باشد.

^۱ - Inductors

تمرین (۳-۴): در صورتی که جریان اعمالی به سلف ارائه شده در شکل (۴-۲۰-ب) مطابق شکل (۴-۲۰-الف) باشد، مطلوبست: الف) تغییرات متغیرهای $q(t)$ و $v(t)$ برای این سلف؛ ب) $q(10)$ ؛ ج) $\phi(10)$ ؛ د) $v(10)$.



شکل (۴-۲۰): جریان اعمالی به یک سلف

جواب: ب) $q(10) = \frac{5}{2} C$ ؛ ج) $\phi(10) = \frac{1}{2} \text{ Wb-turn}$ ؛ د) $v(10) = \frac{1}{2} V$.

۴-۷- سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

براساس شکل (۴-۱۹) و تعریفی که از یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان در بخش قبلی ارائه نمودیم، مشخصه این نوع سلف را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$\phi(t) = L \cdot i(t) \quad (۴-۲۱)$$

که در این رابطه، L اندوکتانس سلفی^۱ است که مستقل از زمان و جریان اعمالی می‌باشد. این اندوکتانس سلفی بیان می‌کند که با اعمال جریان الکتریکی مورد نظر به سلف و با توجه به مشخصات فیزیکی سلف، چه مقدار شار الکتریکی ایجاد می‌شود. این بدین معنی است که با اعمال جریان الکتریکی به سلف، در میدان مغناطیسی آن، مقداری انرژی ذخیره می‌شود. واحد اندوکتانس را هانری^۲ می‌نامیم و با علامت H نشان می‌دهیم.

با جایگزینی رابطه (۴-۲۱) در (۴-۲۰) و با در نظر گرفتن ثابت بودن اندوکتانس L داریم:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (۴-۲۲)$$

حال اگر رابطه اخیر را از بازه صفر تا زمان t ، انتگرال گیری نماییم، می‌توان نوشت:

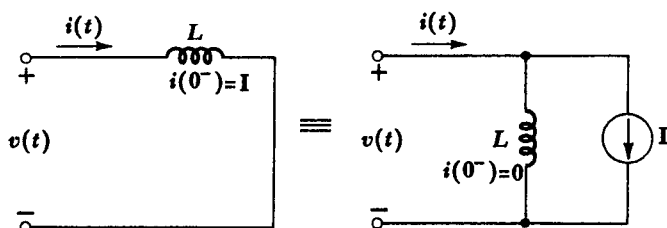
$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (۴-۲۳)$$

^۱- Inductance

^۲- Henry

که $i(0)$ جریان اولیه سلف در زمان $t=0$ است؛ به عبارت دیگر، قبل از ایجاد شار در سلف ناشی از عبور جریان الکتریکی از آن، مقدار شاری می‌تواند ناشی از پس ماند مغناطیسی موجود در سلف ایجاد شود که معادل این شار را با $i(0)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که در بسیاری از مواقع، به جای متغیر $\frac{1}{L}$ از متغیر اندوکتانس معکوس^۱ استفاده می‌شود که با Γ نمایش می‌دهیم.

همچنین معادله (۴-۲۳) نشان می‌دهد که برای زمان $t \geq 0$ ، جریان عبوری از یک سلف، از جمع جریان اولیه $i(0)$ سلف در زمان $t=0$ ، و جریان عبوری از سلف با اندوکتانس L و بدون جریان اولیه تشکیل شده است. بنابراین، هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه $i(0)$ را می‌توان به صورت اتصال موازی یک منبع جریان با $I = i(0)$ و یک سلف با اندوکتانس L و بدون جریان اولیه در نظر گرفت. این موضوع را می‌توان در شکل (۴-۲۱) مشاهده نمود.



شکل (۴-۲۱): مدار معادل یک سلف با وجود جریان اولیه

پارامترهای دیگری که باید برای عنصر سلف بیان کنیم، توان و انرژی الکتریکی در سلف خطی تغییرناپذیر با زمان است. توان الکتریکی تحویلی به این سلف را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{W} \quad (۴-۲۴)$$

همچنین انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف برابر است با:

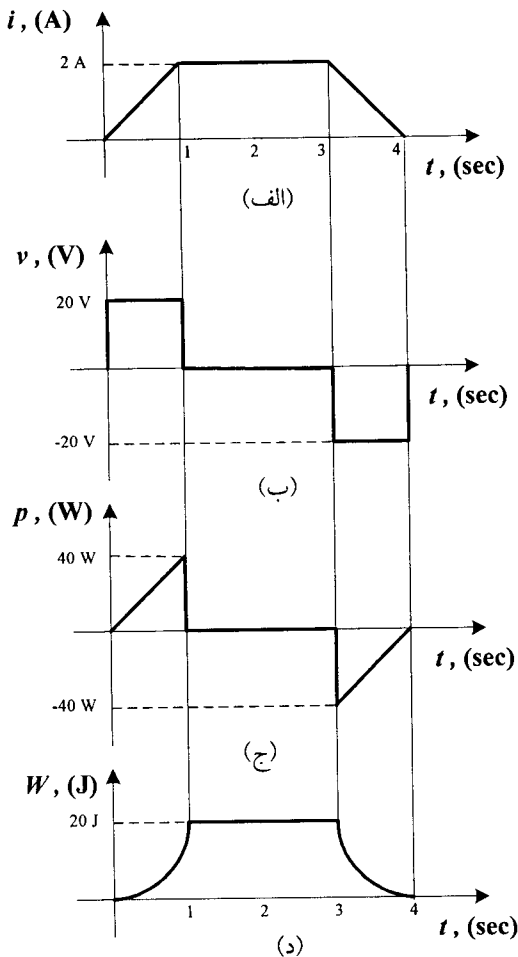
$$w(t) = \int p(t) dt = \int L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad \text{J} \quad (۴-۲۵)$$

پس انرژی ذخیره شده در سلف، تنها به مقدار جریان عبوری از سلف بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن جریان هیچ ربطی ندارد. این انرژی با کم شدن جریان تا صفر، دوباره به مدار بر می‌گردد. به عبارت دیگر، اگر در یک مدار القایی جریان دار، کلید مربوطه به طور ناگهانی باز شود، جریان به سرعت (اما نه به شکل آنی) کاهش خواهد یافت و لذا ولتاژ

^۱ Reciprocal Inductance

نسبتاً بالایی بین دو اتصال کلید ظاهر خواهد شد که ممکن است به شکل قوس الکتریکی (جرقه بین دو کنتاکت کلید) ظاهر شود. این قوس الکتریکی، امکان اتلاف انرژی ذخیره شده در سلف را به صورت گرما در خود قوس و در مقاومت‌های مدار فراهم می‌سازد.

مثال (۲-۴): یک سلف با اندوکتانس سلفی 10H را در نظر بگیرید که جریان الکتریکی اعمالی به آن مطابق شکل (۲۲-۴-الف) می‌باشد. برای این سلف، ولتاژ الکتریکی $v(t)$ ، توان تحویلی به سلف $p(t)$ و انرژی ذخیره شده در آن $w(t)$ را برحسب زمان رسم کنید.



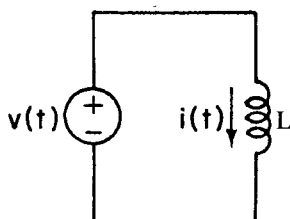
شکل (۲۲-۴): شکل موج‌های سلف مثال (۲-۴): (الف) جریان؛ (ب) ولتاژ؛ (ج) توان الکتریکی؛ (د) انرژی ذخیره شده

حل: این منحنی‌ها را می‌توان در شکل‌های (۴-۲۲-ب) تا (۴-۲۲-د) مشاهده نمود. شکل موج ولتاژ دو سر سلف را می‌توان با توجه به رابطه $v(t) = L \frac{di}{dt}$ به دست آورد. از آنجا که مشتق هر تابع شیب، یک تابع پله است، لذا با تغییرات یکنواخت جریان عبوری، ولتاژ ثابتی در دو سر سلف ایجاد می‌شود و با ثابت شدن جریان عبوری از سلف، ولتاژ دو سر آن صفر می‌شود که در این حالت، توان انتقالی نیز صفر خواهد شد. از انتگرال‌گیری ترسیمی شکل موج توان، می‌توان انرژی ذخیره شده در سلف مذکور را به نمایش گذاشت که این موضوع در شکل (۴-۲۲-د) نشان داده شده است.

۴-۸- شکل موج‌های ولتاژ و جریان در یک سلف

مشابه عملکرد خازن در بخش (۴-۵)، می‌خواهیم اثرات تحریک سلف را در شکل موج‌های ولتاژ و جریان دو سر آن مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور مطابق با شکل (۴-۲۳) فرض کنید که یک سلف با یک منبع ولتاژ $v(t)$ تغذیه شود. مقدار جریان اندازه‌گیری شده و عبوری از سلف از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

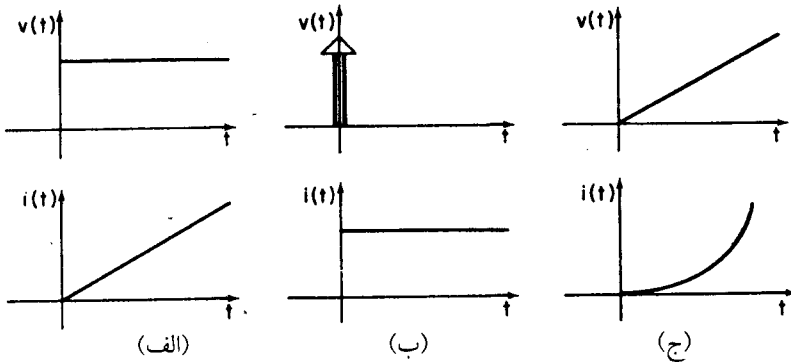
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0) \quad t > 0 \quad (۴-۲۶)$$



شکل (۴-۲۳): تحریک یک سلف با یک منبع ولتاژ

این رابطه بیان می‌کند که اگر ورودی $v(t)$ ، یک ولتاژ به شکل تابع پله باشد، آنگاه جریان عبوری از سلف به صورت یک تابع شیب به اضافه یک جریان اولیه $i(0)$ خواهد بود. به عبارت دیگر، قبل از اعمال تابع ولتاژ، جریان اولیه سلف، معادل با شار اولیه ایجاد شده توسط سلف است که به صورت پس ماند در آن ظهور می‌کند. به همین علت است که به $i(0)$ ، شرط اولیه متغیر جریان عبوری از سلف می‌نامیم. اگر این جریان اولیه برابر صفر باشد، آنگاه با اعمال ولتاژ ثابت به شکل یک تابع پله، جریان خروجی مطابق با شکل (۴-۲۴-الف) به صورت یک تابع شیب خواهد بود. همچنین اگر منبع ولتاژ به صورت یک تابع ضربه باشد، شکل موج جریان عبوری از سلف مطابق با شکل (۴-۲۴-ب) به صورت

یک تابع پله است و اگر منبع ولتاژ به صورت یک تابع شیب باشد، جریان عبوری به شکل یک تابع سهموی است که در شکل (۴-۲۴-ج) نشان داده شده است. این منحنی‌ها نشان می‌دهد که رابطه $v(t) = L \frac{di}{dt}$ در این سه حالت صادق می‌باشد.



شکل (۴-۲۴): شکل موج‌های جریان عبوری از سلف با منابع ولتاژ مختلف: (الف) منبع ولتاژ پله؛ (ب) منبع ولتاژ ضربه؛ (ج) منبع ولتاژ شیب

از منحنی‌های ارائه شده در شکل (۴-۲۴) در می‌یابیم که برای اینکه شکل موج جریان عبوری از سلف، به صورت یک تابع گسسته باشد (در حالت ب از شکل)، به گونه‌ای که مشتق آن با یک دامنه نامحدود باشد، باید منبع ولتاژ به صورت یک تابع ضربه باشد. این موضوع، یک شرط بسیار مهم را در شکل موج جریان عبوری از سلف ارائه می‌کند که در زیر بیان می‌گردد:

شرط پیوستگی برای سلف‌ها: با توجه به آنکه در عمل نمی‌توان یک ولتاژ ضربه ایجاد نمود، لذا جریان عبوری از سلف خطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت یک تابع پیوسته است و نمی‌تواند دارای گسستگی باشد. به عبارت دیگر، تحت هیچ شرایطی، جریان عبوری از سلف به طور ناگهانی نمی‌تواند تغییر نماید.

لذا برای یک سلف، با توجه به پیوستگی جریان عبوری از آن در هر لحظه t_0 داریم:

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) = i_L(t_0) \quad (۴-۲۷)$$

به عبارت دیگر، اگر در زمان کلیدزنی برای یک سلف (که معمولاً زمان $t = t_0$ در نظر می‌گیریم) یک ولتاژ به آن متصل شود، جریان سلف به طور ناگهانی و آنی نمی‌تواند تغییر کند؛ زیرا جریان عبوری از سلف به صورت یک متغیر پیوسته خواهد بود و تغییرات ناگهانی را شامل نمی‌شود.

۴-۹- ترکیب سری و موازی خازن‌ها و سلف‌ها

اکنون که با عناصر اساسی سلف و خازن در مدارهای الکتریکی آشنا شدیم، باید ببینیم که ترکیبات سلف‌ها و خازن‌ها را چگونه می‌توان به صورت سلف معادل و یا خازن معادل به نمایش گذاشت. مشابه عملکرد معادل سازی در مقاومت‌ها، استفاده از دو قانون اساسی کیرشهف (یعنی قانون KVL و KCL) در یافتن سلف معادل و خازن معادل الزامی است. در قسمت‌های زیر، این روند مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

الف) اتصال سری خازن‌ها

فرض کنید که m خازن مطابق با شکل (۴-۲۵-الف) به طور سری با یکدیگر متصل شده‌اند که هر کدام از خازن‌ها مثلاً خازن k دارای ولتاژ اولیه $v_k(o)$ می‌باشد. حال می‌خواهیم خازن معادل این m خازن را مطابق با شکل (۴-۲۵-ب) محاسبه نماییم. در صورتی که خازن‌ها، به صورت خطی تغییرناپذیر با زمان باشند آنگاه:

$$v_k(t) = v_k(o) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) d\tau \quad (28-4)$$

با به کار بردن قانون KCL در همه گره‌های اتصال خازن‌ها درمی‌یابیم که،

$$i_k(t) = i(t) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

به عبارت دیگر، بار انتقالی بر روی تمام صفحات خازن‌ها باید با یکدیگر برابر باشند. حال با استفاده از قانون KVL و استفاده از شکل (۴-۲۵-الف) می‌توان نوشت:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_m(t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \quad (29-4)$$

و در لحظه $t = 0$ داریم:

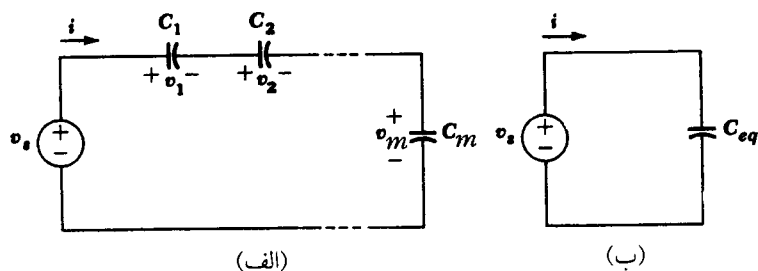
$$v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o) \quad (30-4)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۲۸) در رابطه (۴-۲۹)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$v(t) = v(o) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (31-4)$$

بنابراین، خازن معادل در شکل (۴-۲۵-ب) دارای خصوصیات زیر است:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k} \quad , \quad v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o) \quad (32-4)$$



شکل (۴-۲۵): اتصال سری خازن‌های خطی: (الف) اتصال سری m خازن؛
(ب) خازن معادل

در نهایت، به‌طور خلاصه در می‌یابیم که اتصال سری m خازن که هر یک با ظرفیت خازنی C_k و ولتاژ اولیه $v_k(o)$ است، معادل یک خازن خطی با ظرفیت C و با ولتاژ اولیه $v(o)$ می‌باشد که این مقادیر، توسط روابط (۴-۳۲) به‌دست می‌آیند.

در صورتی‌که به‌جای ظرفیت خازنی از الاستانس خازنی (یعنی $S_k = 1/C_k$) استفاده کنیم، آنگاه معادله (۴-۳۲) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$S = \sum_{k=1}^m S_k, \quad v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o) \quad (۴-۳۳)$$

به‌عبارت دیگر، الاستانس خازن معادل ناشی از m خازن سری، برابر مجموع الاستانس m خازن سری می‌باشد. یعنی الاستانس خازن‌های سری، نقش مقاومت را در مقاومت‌های سری ایفا می‌کند.

(ب) اتصال موازی خازن‌ها

در اتصال موازی خازن‌ها، این فرض باید برقرار باشد که ولتاژ اولیه تمام آنها با یکدیگر مساوی باشد؛ زیرا در غیر این‌صورت، قانون KVL در لحظه $t=0$ و در موازی کردن خازن‌ها نقض می‌شود. حال فرض کنید که m خازن به‌طور موازی مطابق شکل (۴-۲۶-الف) با هم متصل شده باشند. می‌خواهیم خصوصیات خازن معادل را مطابق شکل (۴-۲۶-ب) محاسبه کنیم. با استفاده از قانون KVL داریم:

$$v_1(t) = v_2(t) = \dots = v_m(t) \quad (۴-۳۴)$$

و با استفاده از قانون KCL می‌توان نوشت:

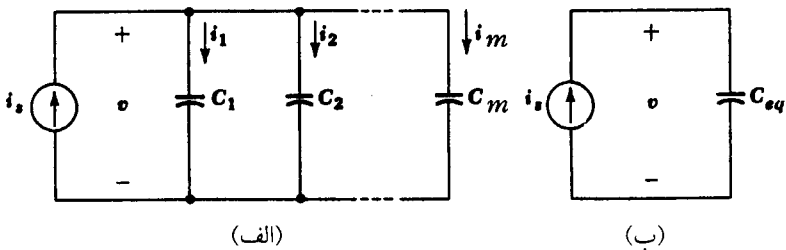
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_m(t) = \sum_{k=1}^m i_k(t) \quad (۴-۳۵)$$

با استفاده از رابطه (۳۴-۴) و جایگزینی در رابطه (۳۵-۴) داریم:

$$i(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \dots + C_m \frac{dv_m(t)}{dt} = \left(\sum_{k=1}^m C_k \right) \frac{dv(t)}{dt}$$

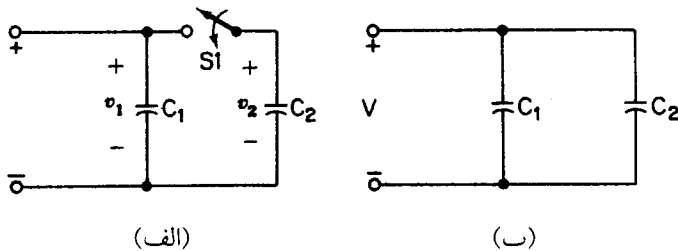
به عبارت دیگر، خازن معادل در شکل (۴-۲۶-ب) دارای خصوصیات زیر است:

$$C = \sum_{k=1}^m C_k, \quad v(o) = v_k(o) \quad (۴-۳۶)$$



شکل (۴-۲۶): اتصال موازی خازن‌ها: (الف) اتصال موازی؛ (ب) خازن معادل

مثال (۴-۳): فرض کنید دو خازن با ظرفیت‌های C_1 و C_2 و ولتاژهای اولیه V_1 و V_2 مطابق شکل (۴-۲۷-الف) به هم متصل شوند. در لحظه کلیدزنی ($t=0$) چه اتفاقی در مدار رخ می‌دهد؟



شکل (۴-۲۷): اتصال دو خازن به شکل موازی با ولتاژهای اولیه مخالف؛ (الف) قبل از وصل کلید؛ (ب) بعد از وصل کلید

حل: با وصل کلید در زمان $t=0$ ، دو خازن با هم به شکل موازی و مطابق با شکل (۴-۲۷-ب) درمی‌آیند و لذا داریم:

$$C = C_1 + C_2 \quad (۴-۳۷)$$

در لحظه قبل از کلیدزنی (در زمان $t=0^-$) بار ذخیره شده در دو خازن، برابر است با:

$$Q(o^-) = Q_1(o^-) + Q_2(o^-) = C_1 V_1 + C_2 V_2 \quad (۴-۳۸)$$

اما با توجه به آنکه برای هر سلف k ام رابطه

$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt} = L_k \frac{di}{dt}$$

برقرار است، لذا با جایگزینی رابطه اخیر در رابطه (۴-۴۲) خواهیم داشت:

$$v = \sum_{k=1}^m L_k \frac{di}{dt} \quad (۴-۴۳)$$

با توجه به آنکه برای سری شدن سلف‌ها، باید جریان اولیه آنها با یکدیگر برابر باشند، لذا مشخصات سلف معادل را می‌توان به صورت روابط زیر بیان نمود:

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^m L_k \quad , \quad i(o) = i_k(o) \quad (۴-۴۴)$$

پس نتیجه می‌گیریم که اتصال سری m سلف با اندوکتانس L_k و جریان اولیه $i(o)$ برای

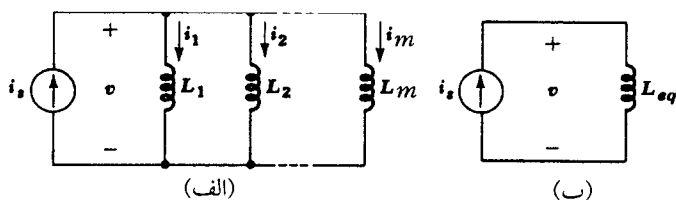
هر کدام، معادل یک سلف با اندوکتانس $L_{eq} = \sum_{k=1}^m L_k$ با همان جریان اولیه $i(o)$ است.

د) اتصال موازی سلف‌ها

برای اتصال موازی سلف‌ها مطابق شکل (۴-۲۹-الف) و با استفاده از قوانین KVL و

KCL به این نتیجه می‌رسیم که مشخصات سلف معادل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{L_k} \quad , \quad i(o) = \sum_{k=1}^m i_k(o) \quad (۴-۴۵)$$



شکل (۴-۲۹): اتصال موازی سلف‌ها: (الف) اتصال موازی؛ (ب) سلف معادل

لازم به ذکر است که مطابق تعریفی که برای اندوکتانس معکوس برای سلف‌ها تعریف نمودیم که،

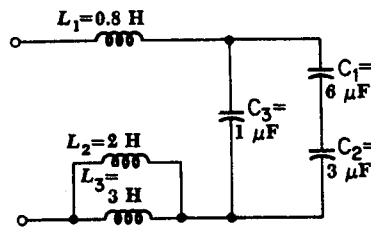
$$\Gamma_k = \frac{1}{L_k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

حال می‌توانیم رابطه (۴-۴۵) را براساس اندوکتانس معکوس معادل Γ_{eq} به صورت زیر تغییر داد:

$$\Gamma_{eq} = \sum_{k=1}^m \Gamma_k, \quad i(o) = \sum_{k=1}^m i_k(o) \quad (۴-۴۶)$$

بنابراین اندوکتانس معکوس در سلف‌های موازی، نقش رسانایی G را برای مقاومت‌های موازی بازی می‌کند.

مثال (۴-۴): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۴-۳۰) را با حد امکان ساده کنید.



شکل (۴-۳۰): یک شبکه LC

حل: در این مدار، ابتدا از خاصیت سری بودن خازن‌های C_1 و C_2 استفاده می‌کنیم که معادل این دو را با C_{12} نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2 \mu F$$

سپس خازن معادل C_{12} با خازن C_3 موازی می‌شود. لذا خازن کل مدار برابر است با:

$$C_{eq} = C_{12} + C_3 = 2 + 1 = 3 \mu F$$

از طرف دیگر سلف‌های L_2 و L_3 با هم موازی می‌باشند که معادل آنها را به صورت L_{23} نشان داده و برابر خواهد بود با:

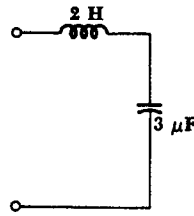
$$\frac{1}{L_{23}} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

$$L_{23} = \frac{L_2 \cdot L_3}{L_2 + L_3} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ H}$$

در نهایت، سلف L_{23} با L_1 به طور سری قرار می‌گیرند. یعنی:

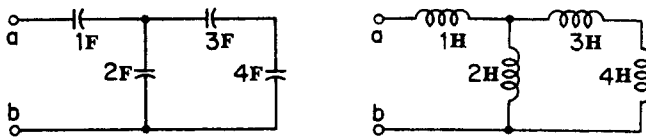
$$L_{eq} = L_{23} + L_1 = 1.2 + 0.8 = 2 \text{ H}$$

پس مدار معادل شکل (۴-۳۰) را می‌توان به صورت شکل (۴-۳۱) نشان داد.



شکل (۴-۳۱): مدار معادل شکل (۴-۳۰)

تمرین (۴-۴): دو مدار سلفی و خازنی ارائه شده در شکل (۴-۳۲) را ساده کنید.



شکل (۴-۳۲): دو مدار الکتریکی سلفی و خازنی

جواب: $C_{eq} = 0.7878 \text{ F}$, $L_{eq} = 2.555 \text{ H}$

۴-۱۰-۱ اندوکتانس متقابل و ترانسفورماتور

در فصل‌ها و بخش‌های قبلی عناصر دو سر را بیان نمودیم که به وسیله روابطی که ولتاژ شاخه آنها را به جریان شاخه مربوط می‌سازد، مشخص شده‌اند. در این بخش می‌خواهیم سلف‌های تزویج شده^۱ و ترانسفورماتور ایده‌آل را بیان کنیم. تفاوت این عناصر با مقاومت، سلف و خازن در آن است که این عناصر، بیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه، به ولتاژها و جریان‌های شاخه‌های دیگر مربوط است. به همین علت، آنها را عناصر تزویج شونده^۲ می‌گویند.

۴-۱۰-۱-۱ سلف‌های تزویج شده

برای شروع این بحث، مناسب است تا یک سیم‌پیچ را مطابق شکل (۴-۳۳) مورد بررسی قرار دهیم. در اینجا سیم‌پیچ را معادل یک عنصر سلف در نظر می‌گیریم. فرض

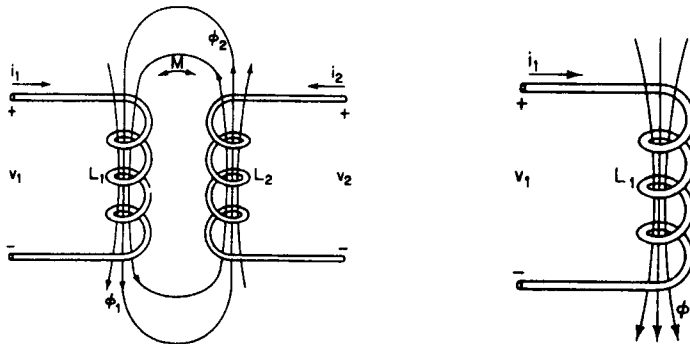
^۱- Coupled Inductors

^۲- Coupling Elements

کنید که جهت جریان و جهت پیچش سیم‌پیچ، مطابق شکل مذکور باشد که براساس قانون دست راست، جهت خطوط شار از بالای سیم‌پیچ به پایین آن است. قانون دست راست بیان می‌کند که اگر انگشتان دست راست را در جهت پیچش سیم‌پیچ و هم‌جهت با جریان عبوری از سیم، به دور آن، حلقه بزنیم، آنگاه جهت شست دست، جهت شار درون سیم‌پیچ را مشخص می‌کند. برای شار این سیم‌پیچ می‌توان نوشت:

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) \quad (4-47)$$

که $\phi_1(t)$ شار ارتباطی، $i_1(t)$ جریان عبوری از سیم‌پیچ و L_1 اندوکتانس آن است. حال اگر یک سیم‌پیچ دیگر در کنار سیم‌پیچ مذکور و مطابق با شکل (۴-۳۴) قرار دهیم، طرحواره یک جفت سلف تزویج شده ایجاد می‌شود (که به سیم‌پیچ‌های تزویج هم مشهور می‌باشند). در این حالت، جریان عبوری از سیم‌پیچ دوم نیز شاری ایجاد می‌کند که با سیم‌پیچ اول، ارتباط پیدا می‌کند. بنابراین، شار مغناطیسی $\phi_1(t)$ در سیم‌پیچ اول ناشی از جریان سیم‌پیچ‌های اول و دوم (جریان‌های $i_1(t)$ و $i_2(t)$) می‌باشد. به عبارت دیگر، داریم:



شکل (۴-۳۳): یک سیم‌پیچ منفرد شکل (۴-۳۴): دو سیم‌پیچ تزویج شده

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \quad (4-48)$$

که L_1 اندوکتانس خودی^۱ سیم‌پیچ ۱ و M_{12} اندوکتانس متقابل^۲ سیم‌پیچ دوم با سیم‌پیچ اول می‌باشد. واحد هر دو اندوکتانس بر حسب هانری می‌باشد. براساس قانون القای فارادی، تغییرات این شار بر حسب زمان، ولتاژی در دو سر سیم‌پیچ اول ایجاد می‌کند که برابر است با:

^۱ - Self Inductance

^۲ - Mutual Inductance

$$v_1(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (49-4)$$

همین مطالب را می‌توان برای سیم‌پیچ دوم بیان نمود. شار در برگرفته سیم‌پیچ دوم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_2i_2(t) \quad (50-4)$$

که L_2 اندوکتانس خودی سیم‌پیچ دوم، و M_{21} اندوکتانس متقابل سیم‌پیچ اول با سیم‌پیچ دوم می‌باشد. در نتیجه، ولتاژ القایی در سیم‌پیچ دوم برابر خواهد بود با:

$$v_2(t) = \frac{d\phi_2(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (51-4)$$

معادلات (49-4) و (51-4)، ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سیم‌پیچ را با یکدیگر ارائه می‌دهد.

حال برای محاسبه میزان انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دو سیم‌پیچ، فرض می‌کنیم که $i_1(0) = i_2(0) = 0$ باشد؛ یعنی شارهای دو سیم‌پیچ در لحظه $t = 0$ برابر صفر می‌باشد. حال با اعمال جریان‌های الکتریکی i_1 و i_2 با توجه به اینکه $M_{12} = M_{21} = M$ می‌باشد، لذا انرژی تزریقی به دو سیم‌پیچ از انتگرال توان انتقالی به دو سیم‌پیچ بدست می‌آید که:

$$w(i_1, i_2) = \int_0^t [v_1(\tau)i_1(\tau) + v_2(\tau)i_2(\tau)]d\tau$$

با جایگذاری رابطه‌های (49-4) و (51-4) در رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} w(i_1, i_2) &= \int_0^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{d\tau} + M(i_1 \frac{di_2}{d\tau} + i_2 \frac{di_1}{d\tau}) + L_2 i_2 \frac{di_2}{d\tau} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \end{aligned} \quad (52-4)$$

$$w(i_1, i_2) = w(i_1, 0) + M i_1(t) i_2(t) + w(0, i_2) \quad (53-4)$$

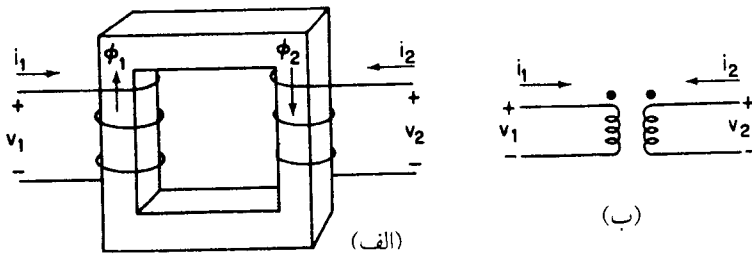
که جمله اول در رابطه (53-4) انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_2 = 0$ و برقراری جریان i_1 در سیم‌پیچ اول باشد. همچنین $w(0, i_2)$ با $i_1 = 0$ و اعمال i_2 به سیم‌پیچ دوم می‌باشد. جمله $M i_1 i_2$ هم انرژی مربوط به تزویج بین دو سیم‌پیچ اول و دوم می‌باشد که با توجه به مثبت یا منفی بودن M ، علامت آن نیز تغییر می‌کند.

مسئله مهمی که در مورد سیم‌پیچ‌های (سلف‌های) تزویج وجود دارد، علامت ضریب القاء متقابل (M) می‌باشد. علامت M را تنها می‌توان با در نظر گرفتن دقیق وضعیت فیزیکی سیم‌پیچ‌ها و جهات قراردادی متغیرها تعیین نمود. برای این منظور فرض کنید که $i_2 = 0$ باشد. در نتیجه،

$$\phi_2(t) = M \cdot i_1(t)$$

$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

حال اگر یک جریان افزایشی مطابق شکل (۴-۳۵-الف) وارد سیم‌پیچ اول شود، در این صورت $\frac{di_1}{dt} > 0$ بوده و چون $v_2 = M \frac{di_1}{dt}$ است، لذا علامت $v_2(t)$ با علامت M ، یکسان می‌باشد. در شرایطی که پتانسیل سر بالایی سیم‌پیچ دوم از سر پایینی آن بیشتر باشد آنگاه $v_2 > 0$ خواهد بود و بالطبع باید $M > 0$ باشد. پس علامت M ، هم به وضع فیزیکی سیم‌پیچ‌ها و هم به جهات قراردادی انتخاب شده بستگی دارد که در شکل (۴-۳۵) به مقدار مثبت می‌باشد. پس در شکل (۴-۳۵-الف) اگر جریان دو سیم‌پیچ از سرهای بالایی وارد سیم‌پیچ‌ها شوند و جهت قراردادی ولتاژ و جریان سیم‌پیچ‌ها هم مطابق شکل باشد آنگاه M ، مثبت می‌باشد که این موضوع را با نقطه‌های توپر در بالای سیم‌پیچ‌ها نشان می‌دهیم.



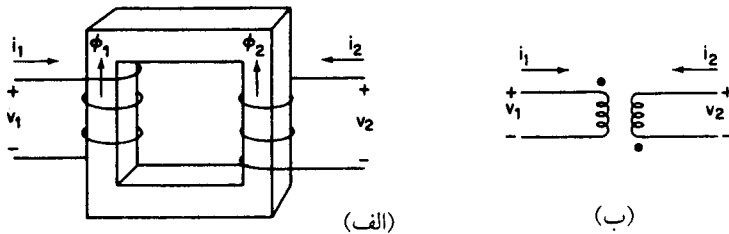
شکل (۴-۳۵): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل مثبت

برای تشخیص اثرات اندوکتانس متقابل منفی، شکل (۴-۳۶-الف) را در نظر بگیرید. در این شکل، اگر $\frac{di_1}{dt}$ مثبت باشد آنگاه $\frac{d\phi}{dt}$ ، مثبت می‌باشد و در نتیجه، ولتاژ $v_1(t)$ ناشی از عبور جریان i_1 ، به مقدار مثبتی خواهد بود. همچنین با به کار بردن قانون دست راست درمی‌یابیم که با اعمال جریان i_2 به سیم‌پیچ دوم، اگر $\frac{di_2}{dt}$ ، مثبت باشد آنگاه یک شار منفی $\frac{d\phi}{dt}$ در سیم‌پیچ اول ایجاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اثر سیم‌پیچ دوم در سیم‌پیچ اول، منفی می‌باشد. حالت عکس این موضوع هم صادق می‌باشد؛ به این معنی که اثر جریان سیم‌پیچ اول (شار سیم‌پیچ اول) در سیم‌پیچ دوم، منفی می‌باشد. برای نشان دادن این موضوع، اندوکتانس متقابل بین این دو سیم‌پیچ را برابر یک مقدار منفی در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، در این دو سلف تزویج داریم:

$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$$

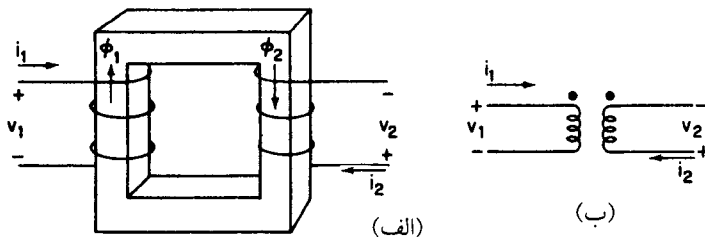
$$v_2(t) = -|M| \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

در شکل (۴-۳۶-ب) مدار الکتریکی دو سلف تزویج را با مقدار M منفی نشان می‌دهد. در این شکل، موقعیت نقاط توپر، بیانگر جهت واقعی سیم‌پیچ‌ها می‌باشد که در شکل (۴-۳۶-ب) یکی در بالا و دیگری در پایین است (چون جهت پیچش آنها با یکدیگر مخالف هم هستند). با استفاده از این نقاط توپر و جهت‌های قراردادی جریان‌های ورودی دو سیم‌پیچ می‌توان به قاعده‌ای دست یافت تا علامت M را تعیین نمود.



شکل (۴-۳۶): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل منفی

تعیین علامت M با استفاده از نقاط توپر: تخصیص نقاط توپر سیم‌پیچ‌ها با توجه به وضعیت فیزیکی سیم‌پیچ‌ها باید به گونه‌ای باشد که اگر جریان دو سیم‌پیچ از نقاط توپر وارد آنها شود، یک تزویج مثبتی را ایجاد کند و M مثبت باشد. حال اگر جهات جریان مشخص شده روی سیم‌پیچ‌ها از نقاط توپر وارد و یا خارج شوند، علامت M مثبت خواهد بود و اگر از یکی از سیم‌پیچ‌ها جریان از سر نقطه دار وارد سیم‌پیچ شود و از سیم‌پیچ دیگر، از سر نقطه دار خارج شود، علامت M منفی خواهد بود. برای درک بهتر این موضوع، شکل (۴-۳۷) را نگاه کنید که دارای یک M منفی است.



شکل (۴-۳۷): سیم‌پیچ‌های تزویج با اندوکتانس متقابل منفی

ضریب تزویج^۱: در سلف‌های تزویج شده، ضرایب اندوکتانس L_1 و L_2 همیشه مثبت هستند ولی اندوکتانس متقابل M ، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. حال می‌توان گفت که

^۱- Coefficient of Coupling

وضعیت دو سلف نسبت به یکدیگر، میزان تزویج بین آن دو را مشخص می‌کند. این مقدار توسط ضریب k مشخص می‌شود:

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (54-4)$$

این ضریب به آن معنا است که اگر دو سلف در فاصله زیادی نسبت به هم قرار داشته باشند، این ضریب، بسیار کوچک و نزدیک به صفر است. همچنین اگر دو سلف بر روی یک هسته پیچیده شده باشد به گونه‌ای که قسمت اعظم شار مغناطیسی از هسته بگذرد، ضریب k بسیار به عدد یک نزدیک است. برای نشان دادن این موضوع که ضریب k همیشه از عدد یک، کوچک‌تر یا مساوی است، می‌توان از انرژی ذخیره شده در سلف‌ها استفاده نمود. رابطه (۵۲-۴) که بیانگر انرژی ذخیره شده در دو سلف تزویج شده است را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$w(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \quad (55-4)$$

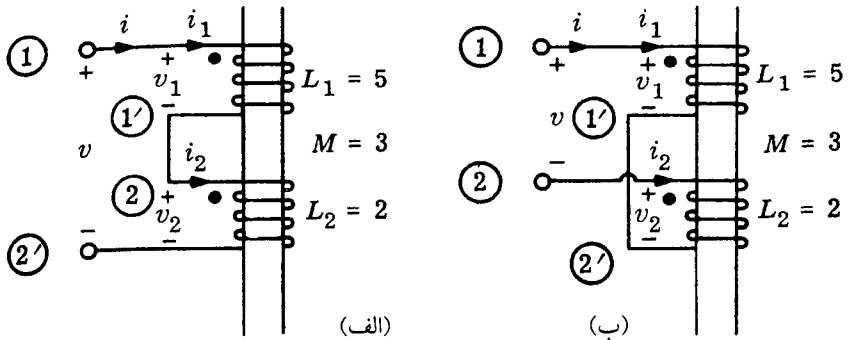
اما می‌دانیم که انرژی $w(i_1, i_2)$ به ازای هر i_1 و i_2 برابر یک مقدار مثبت است. حال با توجه به آنکه جمله اول از رابطه (۵۵-۴) همیشه مثبت است، پس باید $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$ نامنفی باشد. برای اثبات این موضوع، فرض کنید که $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$ منفی باشد؛ آنگاه اگر $i_1 = 0$ و $i_2 = -\frac{M}{L_1}$ باشد آنگاه جمله اول برابر صفر شده و بالطبع $w\left(0, -\frac{M}{L_1}\right)$ برابر یک عدد منفی خواهد شد که این موضوع، غیرممکن است. پس باید:

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} \geq 0 \Rightarrow K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

مثال (۵-۴): شکل (۳۸-۴) دو سلف را در دو حالت سری نشان می‌دهد که با یکدیگر تزویج شده‌اند. در هر حالت، اندوکتانس سری کل مدار را بیابید.
حل: ابتدا برای شکل (۳۸-۴ الف)، معادلات شار را براساس روابط (۴۸-۴) و (۵۰-۴) می‌نویسیم:

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = 5i_1 + 3i_2$$

$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = 3i_1 + 2i_2$$



شکل (۴-۳۸): اتصال سری سلف‌های تزویج شده

در این شکل، با توجه به اینکه جریان‌های i_1 و i_2 از سرهای نقطه‌دار وارد می‌شوند، پس ضریب القاء متقابل به مقدار مثبتی خواهد بود. اما با توجه به قانون KCL که $i_1 = i_2 = i$ و قانون KVL که $v = v_1 + v_2$ می‌باشد آنگاه داریم:

$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$$

اگر شارهای اولیه، صفر باشند، با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 8i_1 + 5i_2 = 13i$$

در نتیجه، اندوکتانس سری کل مدار برابر است با:

$$L = \frac{\phi}{i} = 13 \text{ H}$$

اکنون فرض کنید که این دو سلف به صورت شکل (۴-۳۸-ب) با هم تزویج شوند. در این حالت داریم:

$$i = i_1 = -i_2$$

$$v = v_1 - v_2 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2i_1 + i_2 = i$$

در نهایت، اندوکتانس سری کل مدار برابر است با:

$$L = \frac{\phi}{i} = 1 \text{ H}$$

۴-۱۰-۲- ترانسفورماتور ایده‌ال با دو سیم‌پیچ

ترانسفورماتور ایده‌ال با دو سیم‌پیچ، ساده‌ترین نوع نمایش سلف‌های تزویج شده می‌باشد. این ترانسفورماتور از پیچیدن دو سیم‌پیچ بر روی یک هسته مغناطیسی مشترک مطابق شکل (۴-۳۵-الف) به‌دست می‌آید؛ با این تفاوت که باید ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته، بینهایت باشد تا ترانسفورماتور به‌صورت یک ترانسفورماتور ایده‌ال، هیچ‌گونه انرژی تلفاتی نداشته باشد. به عبارت دیگر، رلوکتانس مغناطیسی^۱ هسته $\mathcal{R}$ باید برابر صفر باشد؛ زیرا رلوکتانس مغناطیسی هسته با ضریب نفوذپذیری آن، نسبت عکس دارد (منظور از رلوکتانس مغناطیسی هسته، مقاومتی است که هسته در مقابل عبور شار مغناطیسی از خود نشان می‌دهد).

برای ساده‌سازی مسئله، فرض می‌کنیم که جریان‌های دو سیم‌پیچ اولیه و ثانویه ترانسفورماتور، مطابق شکل (۴-۳۵-الف) از سرهای نقطه دار وارد شوند تا M دارای مقدار مثبت باشد.

با فرض بینهایت بودن ضریب نفوذپذیری هسته به این نتیجه می‌رسیم که تمام شار مغناطیسی از داخل هسته عبور می‌کند و هیچ‌گونه شار نشتی وجود ندارد. لذا شاری که تک‌تک حلقه‌های سیم‌پیچ اول و دوم را قطع می‌کند، با یکدیگر برابر است. حال اگر $\phi(t)$ را شار عبوری از هسته و n_1 و n_2 را بترتیب تعداد دور سیم‌پیچ‌های اول و دوم بنامیم، آنگاه شار کلی که سیم‌پیچ‌های اول و دوم در بر می‌گیرند، از حاصل ضرب تعداد دورهای مربوطه با شار عبوری از هسته به‌دست می‌آید. یعنی،

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= n_1 \phi(t) \\ \phi_2(t) &= n_2 \phi(t)\end{aligned}\quad (۴-۵۶)$$

با استفاده از قانون القای فارادی، ولتاژ ایجاد شده در دو سر هر سیم‌پیچ برابر است با:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \frac{d\phi_1(t)}{dt} = n_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{d\phi_2(t)}{dt} = n_2 \frac{d\phi(t)}{dt}\end{aligned}\quad (۴-۵۷)$$

آنگاه با تقسیم روابط اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}\quad (۴-۵۸)$$

^۱ - Magnetic Reluctance

اکنون به محاسبه $\phi(t)$ برحسب نیروی محرکه مغناطیسی^۱ (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی $\mathcal{R}$ می‌پردازیم. مشابه قانون اهم در یک مقاومت خطی، مقدار نیروی محرکه مغناطیسی را می‌توان از حاصل ضرب رلوکتانس مغناطیسی در شار عبوری به دست آورد. یعنی:

$$\text{mmf} = \mathcal{R} \cdot \phi(t) \quad (۵۹-۴)$$

با توجه به فرض اولیه که جریان‌های ورودی به سیم‌پیچ‌ها را از نقاط توپر سیم‌پیچ در نظر گرفتیم، لذا mmf کل دو سیم‌پیچ از حاصل ضرب آمپردورهای هر سیم‌پیچ و جمع آنها با هم حاصل می‌شود. یعنی،

$$\text{mmf} = n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = \mathcal{R} \cdot \phi(t)$$

و با در نظر گرفتن این نکته که برای هسته، $\mathcal{R} = 0$ است، لذا خواهیم داشت:

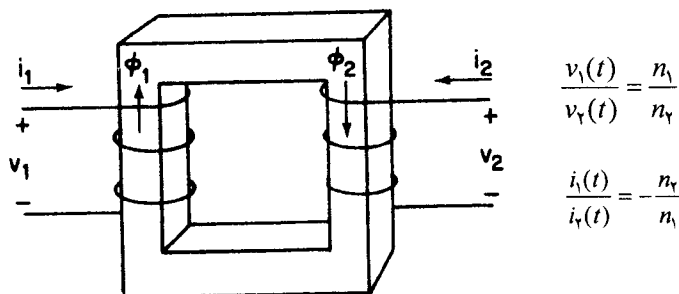
$$n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = 0$$

و در نهایت:

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (۶۰-۴)$$

معادلات (۵۸-۴) و (۶۰-۴)، مشخص کننده روابط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سیم‌پیچ یک ترانسفورماتور ایده‌ال می‌باشد که به‌طور خلاصه می‌توان در شکل (۳۹-۴) مشاهده نمود. همچنین از این دو رابطه ترانسفورماتور درمی‌یابیم که،

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0 \quad (۶۱-۴)$$



شکل (۳۹-۴): ترانسفورماتور ایده‌ال و روابط اساسی آن

به عبارت دیگر، در تمام لحظات، مجموع توان ورودی به دو سیم‌پیچ با هم برابر صفر می‌باشد؛ یعنی هیچ‌گونه انرژی در آن ذخیره نمی‌شود و هیچ انرژی هم تلف نمی‌گردد.

^۱ - Magnetomotive Force

به عبارت دیگر، مقدار توان ورودی به ترانسفورماتور از یک سیم پیچ با توان خروجی از سیم پیچ دیگر دقیقاً برابر است. پس ترانسفورماتور ایده‌ال، یک عنصر بی‌اتلاف و بدون ذخیره انرژی است. همچنین در این ترانسفورماتورها، ضریب توزیع برابر واحد می‌باشد.

۴-۱۱- خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل، با عناصر سلف و خازن و خصوصیت‌های آنان آشنا شدیم که خلاصه مطالب این فصل را می‌توان به صورت زیر اشاره نمود:

- در مورد عنصر خازن به این نتیجه رسیدیم که بین جریان و ولتاژ آن، ارتباط زیر برقرار است:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = v(o) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

- همچنین در مورد عنصر سلف هم بیان نمودیم که جریان و ولتاژ دو سر سلف با هم دارای ارتباط زیر هستند:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = i(o) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- سلف‌ها و خازن‌ها از عناصر پسیو به کار رفته در مدارهای الکتریکی هستند که سری و موازی کردن آنها دارای اندوکتانس و ظرفیت خازنی معادلی خواهند بود که به طور خلاصه می‌توان در جدول (۴-۱) مشاهده نمود.

جدول (۴-۱): اتصالات سری و موازی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها

نوع عنصر	مقدار عناصر	واحد‌های عناصر	مقدار کل در اتصال سری	مقدار کل در اتصال موازی
مقاومت	R_i G_i	اهم مهو	$R_{eq} = \sum R_i$	$G_{eq} = \sum G_i$
خازن	C_i S_i	فاراد داراف	$S_{eq} = \sum S_i$	$C_{eq} = \sum C_i$
سلف	L_i Γ_i	هانری هانری معکوس	$L_{eq} = \sum L_i$	$\Gamma_{eq} = \sum \Gamma_i$

- در انتهای این فصل هم در مورد سلف‌های تزویج صحبت کردیم. معادلاتی که یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییرناپذیر با زمان را تعریف می‌کند عبارت بودند از:

$$v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

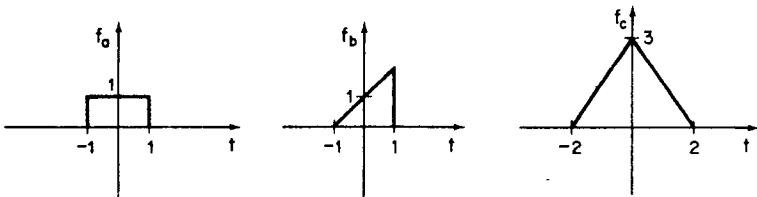
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

که علامت M به مشخصات فیزیکی سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه ترانسفورماتور و جهات قراردادی متغیرهای سیم‌پیچ‌ها بستگی دارد که می‌تواند مقداری مثبت یا منفی باشد.

- یک ترانسفورماتور ایده‌ال را می‌توان یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییرناپذیر با زمان با ضرایب خود القاء بینهایت و ضریب تزویج یک در نظر گرفت.

۴-۱۲- مسائل مروری

- ۱- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی که به صورت $w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt$ می‌باشد، ثابت کنید که انرژی ذخیره شده در یک خازن خطی برابر $w(t) = \frac{1}{2} q^2(t)/C$ خواهد بود.
- ۲- بیان ریاضی شکل موج‌های ارائه شده در شکل (۴-۴۰) را مشخص نمایید.

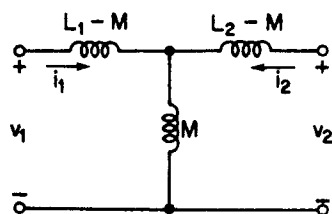


شکل (۴-۴۰): بعضی توابع ریاضی

- ۳- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی $w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt$ اثبات کنید که انرژی ذخیره شده در یک سلف خطی برابر $W(t) = \frac{1}{2} \phi^2(t)/L$ خواهد بود.
- ۴- فرض کنید که سه خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت‌های ۱، ۲ و ۳ میکروفاراد، به‌طور جداگانه دارای ولتاژهای اولیه‌ای بترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ ولت می‌باشند. حال اگر این سه خازن با هم و به‌طور همزمان به‌صورت موازی وصل شوند، ولتاژ حاصل دو سر اتصال موازی چقدر خواهد بود؟ انرژی ذخیره شده در خازن‌ها را قبل و بعد از اتصال موازی به‌دست می‌آورید.

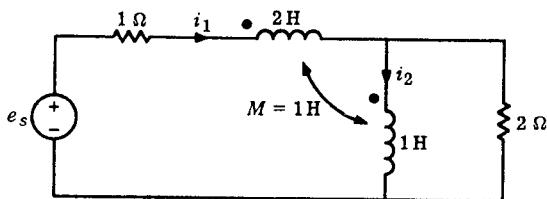
۵- فرض کنید که دو سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس‌های ۱ و ۲ هانری، به‌طور جداگانه دارای جریان‌های اولیه‌ای بترتیب برابر ۲ و ۱ آمپر می‌باشند. حال اگر این سلف‌ها با هم و به‌طور همزمان به‌طور سری وصل شوند، جریان متوجه عبوری از اتصال سری آنها چقدر است؟ انرژی مغناطیسی در این دو سلف را قبل و بعد از سری شدن محاسبه کنید.

۶- در صورتی که دو سلف تزویج شده داشته باشیم که اندوکتانس خودی سیم‌پیچ‌های اول و دوم برابر L_1 و L_2 و اندوکتانس متقابل آنها برابر M باشد، ثابت کنید که مدار معادل الکتریکی این دو سلف تزویج شده به‌صورت شکل (۴-۴۱) خواهد بود.



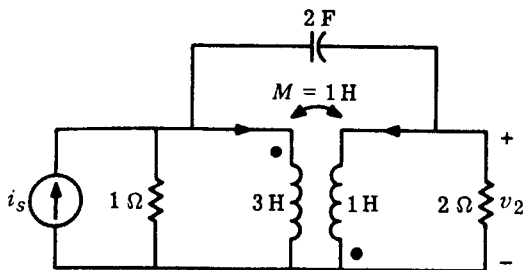
شکل (۴-۴۱): مدار معادل الکتریکی دو سلف تزویج شده

۷- در مدار ارائه‌شده در شکل (۴-۴۲)، معادلات حلقه را با استفاده از قانون KVL بیابید.



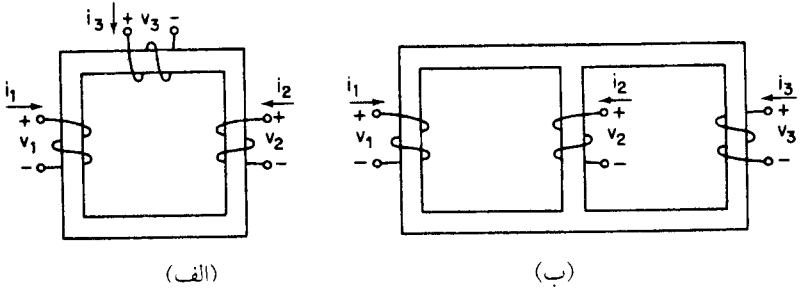
شکل (۴-۴۲): مدار الکتریکی با سلف‌های تزویج

۸- در مدار ارائه‌شده در شکل (۴-۴۳)، معادلات گره را با استفاده از قانون KCL بیابید.



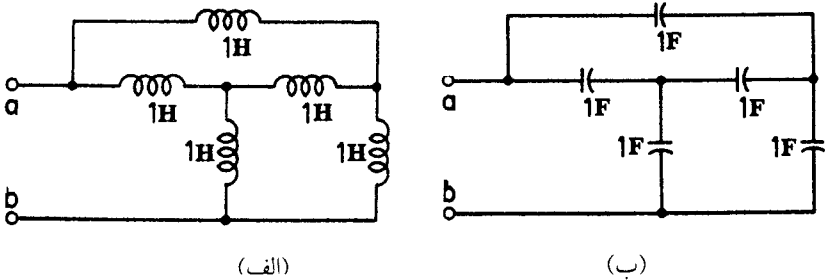
شکل (۴-۴۳): مدار الکتریکی با سلف‌های تزویج

۹- در سلف‌های تزویج ارائه‌شده در شکل (۴-۴۴) ابتدا نقطه‌های توپر را روی سیم‌پیچ‌ها مشخص نموده، سپس معادلات ولتاژ را برای هر یک از سیم‌پیچ‌ها بنویسید.



شکل (۴-۴۴): سلف‌های تزویج سه گانه

۱۰- با استفاده از خاصیت تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس، دو مدار سلفی و خازنی ارائه‌شده در شکل (۴-۴۵) را ساده کنید.



شکل (۴-۴۵): دو مدار الکتریکی سلفی و خازنی

فصل پنجم

مدارهای الکتریکی مرتبه اول

۵-۱- مقدمه

در فصل‌های قبل، عناصر مقاومت، سلف و خازن را تشریح نموده و مدارهای مقاومتی ساده را بر اساس روش‌های مختلف حل مدارهای الکتریکی تحلیل نمودیم. در این فصل برآنیم تا تنوع در عناصر مدار را گسترش داده و مدارهای مقاومتی-سلفی (RL) و مدارهای مقاومتی-خازنی (RC) را مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. در حل این نوع مدارها به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول برخورد می‌کنیم و به‌همین خاطر به این نوع مدارها، مدارهای مرتبه اول^۱ نیز می‌گویند. همچنین عناصر مورد بررسی در این فصل، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان هستند. به‌منظور درک بهتر از روند حل این نوع مدارها، ابتدا مفاهیم پاسخ ورودی صفر^۲ و پاسخ حالت صفر^۳ مدارهای RL و RC را در بخش‌های مجزا مطرح نموده و در نهایت، مفهوم پاسخ کامل این نوع مدارها را با جمع این دو پاسخ در مدارها بیان خواهیم کرد. در فصل بعدی، مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RLC مطرح خواهند شد که در این نوع مدارها، نیاز به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد. به‌همین علت به این نوع مدارها، مدارهای الکتریکی مرتبه دوم می‌گویند.

^۱- First Order Circuits

^۲- Zero Input Response

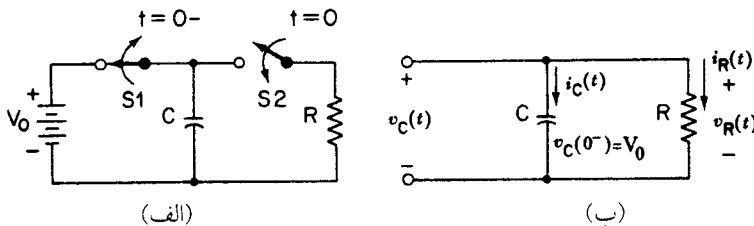
^۳- Zero State Response

۵-۲- پاسخ ورودی صفر

در فصل چهارم بیان نمودیم که عناصر خازن و سلف بترتیب قادرند تا یک ولتاژ اولیه $(v_C(o))$ و یک جریان اولیه $(i_L(o))$ را داشته باشند. بنابراین در مدارهای الکتریکی RL یا RC که به یک منبع الکتریکی متصل باشند، جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها با زمان، در حال تغییر هستند. در این بخش، هدف آن است که مدارهای الکتریکی موردنظر را بدون هیچ‌گونه منبع الکتریکی ورودی (یا ورودی صفر) و فقط با وجود شرایط اولیه برای عناصر سلف یا خازن (یعنی $v_C(o)$ یا $i_L(o)$) مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. لذا به این‌گونه تحلیل مدار، پاسخ ورودی صفر می‌گویند.

۵-۲-۱- مدار الکتریکی RC

یک مدار RC ساده مطابق با شکل (۵-۱) در نظر بگیرید که خازن مدار بدون هیچ‌گونه ولتاژ اولیه است. در این مدار ابتدا فرض می‌شود که خازن C به‌مدت طولانی از طریق کلید S_1 به منبع ولتاژ dc ثابت (یک باتری) با ولتاژ V_0 متصل باشد. در صورتی‌که این کلید تا زمان $t < 0$ بسته باشد نتیجه می‌گیریم که خازن C به‌مقدار V_0 شارژ شده است. حال اگر در زمان $t = 0^-$ (زمان 0^- یعنی دقیقاً قبل از زمان $t = 0$ است) کلید S_1 قطع شده و در زمان $t = 0$ ، کلید S_2 وصل شود، آنگاه مدار ارائه شده در شکل (۵-۱-ب) ایجاد می‌گردد که خازن C با یک ولتاژ اولیه $v_C(o) = V_0$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر، در زمان $t = 0$ ، خازن موردنظر دارای بار ذخیره شده $Q(o) = C.V_0$ خواهد بود که با گذشت زمان، این بار الکتریکی از طریق مقاومت R و با ایجاد جریان $i(t)$ تخلیه می‌شود. در این روند، انرژی اولیه ذخیره شده در خازن، به‌صورت انرژی تلفاتی در مقاومت (تلفات حرارتی) ظاهر می‌شود.



شکل (۵-۱): مدار RC مرتبه اول؛ الف: در وضعیت کلیدزنی؛ ب: پس از کلیدزنی

برای تحلیل مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۱-ب)، برای زمان $t \geq 0$ می‌توان از قوانین KVL یا KCL ارائه شده در فصل سوم استفاده نمود. با توجه به آنکه برای عنصر

مقاومت، رابطه $v_R(t) = R.i(t)$ و برای خازن موردنظر، رابطه $i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$ و $v_C(0) = V_0$ می‌باشد، لذا با استفاده از قوانین KVL و KCL خواهیم داشت:

$$\text{KVL: } v_C(t) = v_R(t) \quad t \geq 0 \quad (1-5)$$

$$\text{KCL: } i_C(t) + i_R(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2-5)$$

با استفاده از روابط مشخصه سلف و خازن در معادله (۲-۵) می‌توان نوشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{R} = 0 \quad (3-5)$$

با توجه به تساوی ولتاژ دو سر مقاومت و خازن بر اساس معادله (۱-۵)، رابطه (۳-۵) به شکل زیر اصلاح می‌گردد:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = 0 \quad t \geq 0, \quad v_C(0) = V_0 \quad (4-5)$$

معادله اخیر، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که بیانگر رفتار مدار خطی ارائه شده در شکل (۱-۵-ب) می‌باشد. جواب کلی معادله دیفرانسیل اخیر به صورت یک تابع نمایی زیر است:

$$v_C(t) = K \cdot e^{-t/RC} \quad (5-5)$$

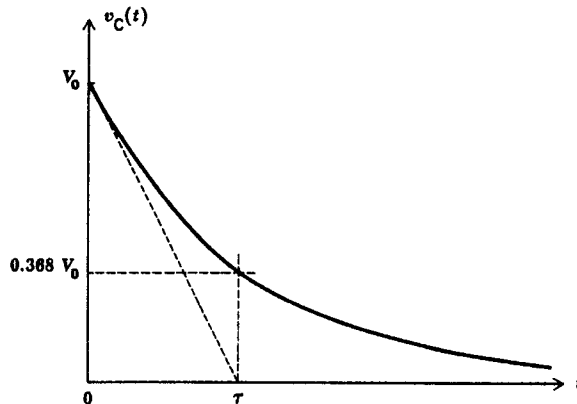
که ضریب K را با شرط اولیه $v_C(0) = V_0$ به صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$K = v_C(0) = V_0$$

در نهایت، جواب نهایی معادله (۴-۵) برابر است با:

$$v_C(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (6-5)$$

نحوه تغییرات ولتاژ دو سر خازن بر اساس رابطه (۶-۵) را می‌توان در شکل (۲-۵) مشاهده نمود که کاهش این ولتاژ با ثابت زمانی $\tau = RC$ انجام می‌گیرد.



شکل (۲-۵): نحوه تغییرات ولتاژ خازن $v_C(t)$

با تعیین ولتاژ $v_C(t)$ ، جریان خازن را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{V_o}{R} \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (۷-۵)$$

همچنین بر اساس روابط (۱-۵) و (۲-۵) می‌توان نوشت:

$$v_R(t) = v_C(t) = V_o \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (۸-۵)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) = \frac{V_o}{R} \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (۹-۵)$$

مثال (۱-۵): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱-۵) مدنظر است که در آن $C = ۱\mu F$ ،

$R = ۱۰k\Omega$ و $v(o) = V_o = ۱۰V$ می‌باشد. منحنی تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ و جریان $i_C(t)$

را برای $t \geq 0$ بیابید.

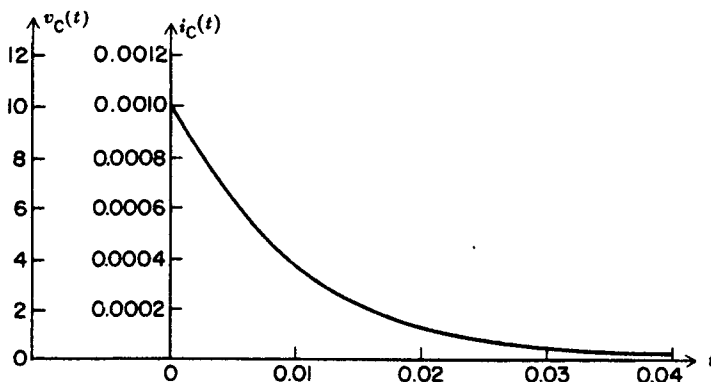
حل: بر اساس معادله (۶-۵) ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$v_C(t) = V_o \cdot e^{-t/RC} = ۱۰ \cdot e^{-۱۰۰t} \text{ (V)}$$

که همچنین جریان $i_C(t)$ نیز بر اساس رابطه (۷-۵) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i_C(t) = -۰.۰۰۱e^{-۱۰۰t}$$

که منحنی تغییرات ولتاژ و جریان الکتریکی دو سر این خازن در شکل (۳-۵) نشان داده شده است.

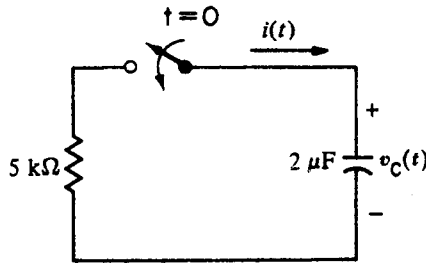


شکل (۳-۵): شکل موج‌های مربوط به مثال (۱-۵)

تمرین (۱-۵): در مدار شکل (۴-۵)، قبل از وصل کلید در زمان $t = 0$ ، خازن دارای

ولتاژ اولیه $۱۰۰V$ می‌باشد. پس از وصل کلید، ولتاژ خازن $v_C(t)$ ، $i(t)$ را برای $t \geq 0$

بیابید.



شکل (۴-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۱)

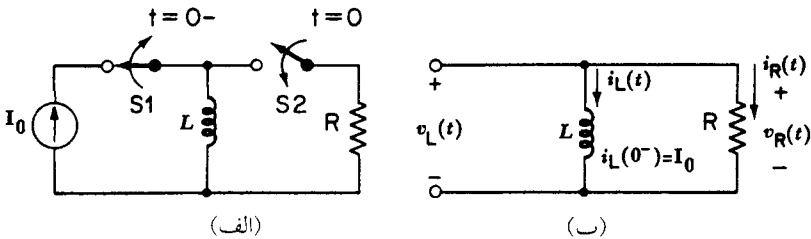
جواب: $i(t) = -0.02e^{-10^4 t}$ (A) ، $v_C(t) = 100e^{-10^4 t}$ (V)

۵-۲-۲- مدار الکتریکی RL

مدارهای الکتریکی متشکل از R و L ، نوع دیگری از مدارهای خطی مرتبه اول می‌باشند. برای این منظور، مدار ارائه شده در شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای زمان $t < 0$ ، کلید S_1 وصل و کلید S_2 قطع می‌باشد. در این حالت، جریان سلف به مقدار جریان ثابت I_0 خواهد رسید. حال در زمان $t = 0$ ، کلید S_1 قطع و کلید S_2 در همان زمان وصل می‌شود. در این حالت، سلف مذکور دارای یک جریان اولیه $i_L(0) = I_0$ خواهد بود که دارای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف برابر $\frac{1}{2} L I_0^2$ می‌باشد. پس از زمان $t = 0$ ، این انرژی مغناطیسی از طریق مقاومت R تلف شده و باعث می‌شود که جریان $i_L(t)$ به مرور زمان، کاهش یابد. مشابه تحلیل مدار RC در بخش قبل، معادلات KVL و KCL در این مدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{KVL: } v_L(t) = v_R(t) \quad t \geq 0 \quad (10-5)$$

$$\text{KCL: } i_L(t) + i_R(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (11-5)$$



شکل (۵-۵): مدار RL مرتبه اول: (الف) در وضعیت کلیدزنی؛ (ب) پس از کلیدزنی

با توجه به آنکه $v_R(t) = R.i_L(t)$ ، $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ و $i_L(0) = I_0$ می باشد لذا رابطه (۱۰-۵) را می توان به صورت معادله دیفرانسیل زیر بیان نمود:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + R.i_L(t) = 0 \quad t \geq 0, \quad I_L(0) = I_0 \quad (۱۲-۵)$$

با حل این معادله دیفرانسیل و با در نظر گرفتن جریان اولیه $i_L(0) = I_0$ خواهیم داشت:

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \quad t \geq 0 \quad (۱۳-۵)$$

که در این رابطه، ثابت زمانی جریان $i_L(t)$ به مقدار $\tau = L/R$ می باشد.

مثال (۲-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۵-ب) فرض کنید که $R = 4\Omega$ ،

$L = 2H$ و $i_L(0) = 5A$ باشد. در این حالت، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.

حل: با استفاده از معادله (۱۲-۵) و بر اساس قانون KVL در مدار مذکور می توان نوشت:

$$2 \frac{di_L(t)}{dt} + 4i_L(t) = 0 \quad I_L(0) = 5A$$

که با حل این معادله خواهیم داشت:

$$i_L(t) = K \cdot e^{-2t} \quad t \geq 0$$

با توجه به آنکه در $t = 0$ ، $i_L(0) = 5A$ می باشد، لذا ضریب K برابر $5A$ خواهد شد. لذا،

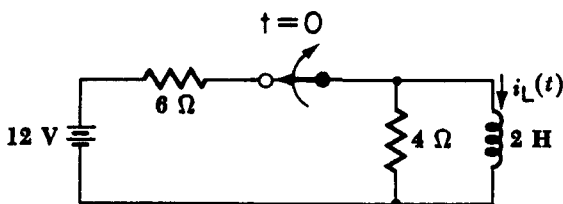
$$i_L(t) = 5e^{-2t} \quad t \geq 0$$

همچنین ثابت زمانی این مدار برابر $\tau = L/R = 0.5$ خواهد بود.

تمرین (۲-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۶) فرض می شود که کلید مدار

به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ کلید، باز می شود. در این حالت برای زمان

$t \geq 0$ ، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۵)

راهنمایی و جواب: ابتدا جریان اولیه سلف $i_L(0)$ را بیابید که با توجه به اتصال کوتاه

شدن سلف در قبل از قطع کلید $i_L(0) = 2A$ می شود. آنگاه $i_L(t) = 2e^{-2t}$

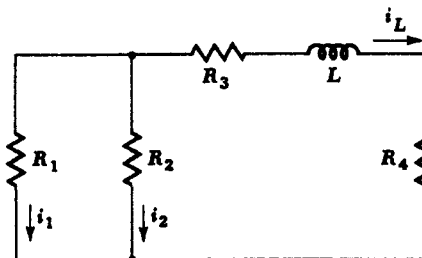
۵-۲-۳- مدارهای جامع تر RL و RC

در این بخش برآنیم تا مطالب ارائه شده در دو بخش قبلی برای مدارهای RL و RC ساده را برای مدارهای جامع تر که دارای چند مقاومت سری- موازی است، گسترش دهیم. برای این منظور کافی است که ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر سلف در مدار RL یا از دو سر خازن در مدار RC را محاسبه نموده و سپس از روابط ارائه شده در دو بخش قبلی برای تحلیل مدار مورد نظر استفاده کنیم. به عنوان نمونه، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۷) را در نظر بگیرید که سلف مدار، دارای جریان اولیه $i_L(o)$ می باشد. برای یافتن $i_L(t)$ برای زمان های $t \geq 0$ ، ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر این سلف را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 \quad (۵-۱۴)$$

در نتیجه با توجه به آنکه ثابت زمانی مدار معادل به صورت $\tau = L/R_{eq}$ می باشد آنگاه جریان $i_L(t)$ برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = i_L(o).e^{-t/\tau} = i_L(o).e^{-\frac{R_{eq}}{L}t} \quad t \geq 0 \quad (۵-۱۵)$$



شکل (۵-۷) یک مدار جامع RL

همچنین می توان با تقسیم جریان $i_L(t)$ در دو شاخه مقاومت های R_1 و R_2 ، جریان های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را به دست آورد:

$$i_1(t) = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(o).e^{-t/\tau} \quad (۵-۱۶)$$

$$i_2(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(o).e^{-t/\tau} \quad (۵-۱۷)$$

از این دو رابطه اخیر، می توان جریان اولیه $i_1(o)$ و $i_2(o)$ را برای دو مقاومت R_1 و R_2 نیز تعیین نمود:

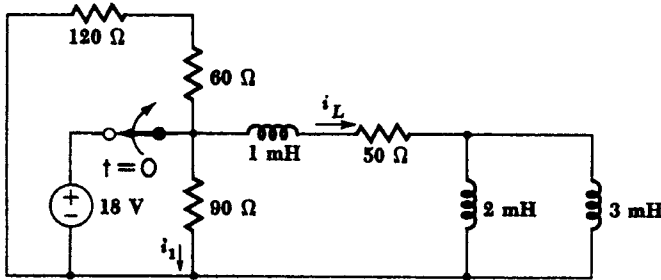
$$i_1(o) = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(o)$$

$$i_2(o) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(o)$$

در نتیجه ارتباط جریان‌های اولیه $i_1(o)$ و $i_2(o)$ به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$i_2(o) = \frac{R_1}{R_2} i_1(o)$$

مثال (۳-۵): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۵) مفروض است که کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می‌شود. نحوه تغییرات جریان‌های $i_L(t)$ و $i_1(t)$ را محاسبه نمایید. فرض کنید که $i_L(o)$ برابر $0/36A$ باشد.



شکل (۸-۵): مدار جامع RL مربوط به مثال (۳-۵)

حل: در ابتدا برای تعیین جریان اولیه $i_1(o)$ باید جریان اولیه $i_L(o)$ را بین دو مقاومت 90Ω و 180Ω تقسیم جریان نمود. یعنی:

$$i_1(o) = -\frac{180}{180 + 90} i_L(o)$$

حال با توجه به موازی بودن دو سلف $2mH$ و $3mH$ و سری شدن موازی این دو سلف با سلف $1mH$ خواهیم داشت:

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2/3 mH$$

همچنین مقاومت معادل مدار RL را می‌توان از موازی کردن دو مقاومت 90Ω با 180Ω و سری شدن با مقاومت 50Ω به دست آورد:

$$R_{eq} = \frac{90 \times 180}{90 + 180} + 50 = 110\Omega$$

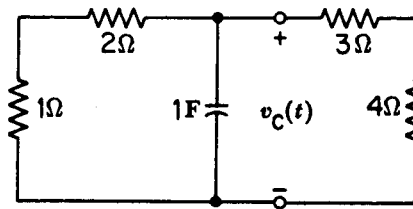
در نهایت جریان $i_L(t)$ بر اساس رابطه (۱۵-۵) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = 0.36e^{-\left(\frac{11}{2 \times 10^{-3}}\right)t} = 0.36e^{-0.05 \times 10^6 t}$$

و،

$$i_1(t) = -0.24e^{-0.05 \times 10^6 t}$$

تمرین (۳-۵): در مدار ارائه شده در شکل (۵-۹)، اگر $v_C(0) = 6V$ باشد آنگاه $v_C(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۵-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۵)

جواب: $v_C(t) = -6e^{-1/21 t}$

۳-۵- پاسخ حالت صفر

در بخش (۲-۵) حالتی از پاسخ مدارهای الکتریکی را بررسی نمودیم که برای زمان‌های $t \geq 0$ هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته و فقط عناصر سلف و خازن مدار دارای جریان و ولتاژ اولیه می‌باشند که این نوع پاسخ مدار را پاسخ ورودی صفر نامیدیم. حال در این بخش می‌خواهیم پاسخ مداری را به دست آوریم که عناصر سلف و خازن مدار، دارای شرایط اولیه نبوده ولی مدار، دارای منبع الکتریکی ورودی باشد. لذا به این نوع پاسخ مدار، پاسخ حالت صفر می‌گویند.

برای توصیف این نوع پاسخ مدار، شکل (۵-۱۰) را در نظر بگیرید که خازن مدار، فاقد ولتاژ اولیه می‌باشد؛ زیرا کلید قبل از زمان $t = 0$ در حالت وصل بوده و منبع جریان، هیچ تأثیری در مدار RC ندارد. حال اگر در زمان $t = 0$ ، کلید موردنظر باز شود با استفاده از قانون KCL برای سه عنصر موازی منبع، خازن و مقاومت می‌توان نوشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = i(t) = I_0 \quad t \geq 0, \quad v_C(0) = 0 \quad (۱۸-۵)$$

لازم به ذکر است که با استفاده از قانون KVL در می‌یابیم که ولتاژ دو سر هر سه عنصر با هم مساوی هستند. معادله (۱۸-۵) یک معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه اول می‌باشد که برای حل آن، نیاز به تعیین جواب معادله دیفرانسیل همگن $(v_h(t))$ و یک جواب خصوصی $(v_p(t))$ از معادله دیفرانسیل ناهمگن می‌باشد. با جمع این دو جواب خواهیم داشت:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t) \quad (19-5)$$

با توجه به معادله دیفرانسیل همگن با صفر قرار دادن سمت راست معادله (۱۸-۵) به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C \cdot \frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{v_h(t)}{R} = 0$$

لذا با حل آن جواب همگن به شکل زیر به دست می‌آید:

$$v_h(t) = K \cdot e^{-t/RC} \quad (20-5)$$

برای تعیین یک جواب خصوصی از معادله (۱۸-۵) کافی است ساده‌ترین مقدار ولتاژ $v_C(t)$ را در نظر گرفت که در این معادله، صادق باشد. لذا ساده‌ترین جواب به صورت مقدار ثابت زیر خواهد بود:

$$v_p(t) = R \cdot I_o \quad (21-5)$$

با جمع کردن دو جواب معادله همگن و جواب خصوصی، جواب کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$v_C(t) = K \cdot e^{-t/RC} + R \cdot I_o$$

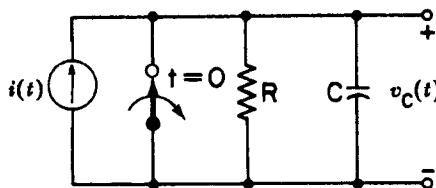
حال ضریب مجهول K را می‌توان با شرط اولیه $v_C(0) = 0$ تعیین نمود. یعنی،

$$0 = K + R \cdot I_o$$

$$K = -R \cdot I_o$$

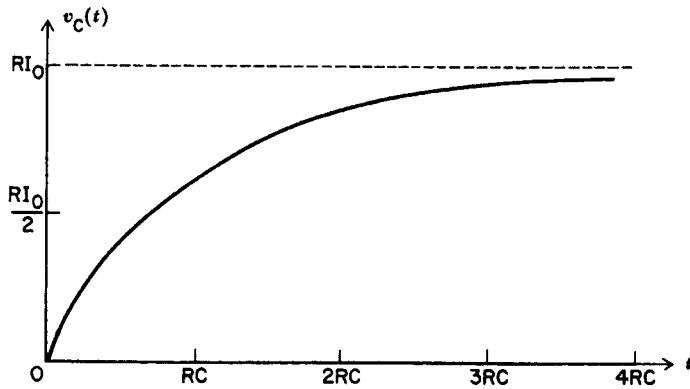
در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_C(t) = R \cdot I_o \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad t \geq 0 \quad (22-5)$$



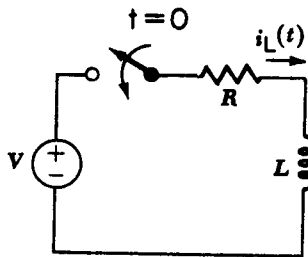
شکل (۱۰-۵): مدار RC با منبع جریان ورودی

شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان در شکل (۱۱-۵) مشاهده نمود که با گذشت زمان طولانی، ولتاژ $v_C(t)$ به مقدار ثابت $R.I_0$ میل خواهد کرد. لازم به ذکر است که مقدار RC برابر ثابت زمانی مدار می‌باشد ($\tau = RC$).



شکل (۱۱-۵): شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ برای مدار شکل (۱۰-۵)

مثال (۴-۵): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۲-۵) و در زمان $t=0$ ، کلید موردنظر بسته می‌شود. در صورتی که جریان اولیه سلف $i_L(0)=0$ باشد جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۱۲-۵): مدار RL مربوط به مثال (۴-۵)

حل: با استفاده از قانون KVL در حلقه موجود در مدار، می‌توان نوشت:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R.i(t) = V \quad t \geq 0$$

برای یافتن جواب معادله همگن، کافی است سمت راست معادله اخیر را برابر صفر قرار داده و با توجه به اینکه $i(0)=0$ می‌باشد لذا،

$$i_h(t) = K.e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \quad t \geq 0$$

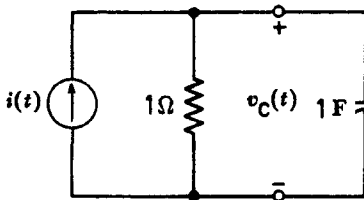
جواب خصوصی نیز برابر $i_p(t) = V/R$ می‌باشد. لذا با جمع جواب معادله همگن و جواب خصوصی خواهیم داشت:

$$i_h(t) = K.e^{-(R/L)t} + V/R \quad t \geq 0$$

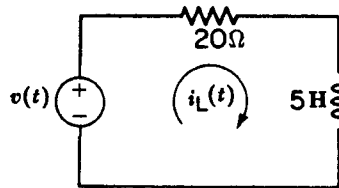
با توجه به آنکه در زمان $t=0$ ، $i(0)=0$ می‌باشد لذا $K = -V/R$ بوده و در نهایت داریم:

$$i(t) = V/R \left(1 - e^{-(R/L)t} \right) \quad t \geq 0$$

تمرین (۴-۵): در مدارهای الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۳) اگر برای $t \geq 0$ ، منبع جریان $I = 1A$ و منبع ولتاژ $V = 3V$ باشند، ولتاژ $v_C(t)$ در شکل (۵-۱۳-الف) و جریان $i_L(t)$ را در شکل (۵-۱۳-ب) بیابید.



(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۳): مدارهای الکتریکی مربوط به تمرین (۴-۵)

جواب: $v_C(t) = (1 - e^{-t})$ و $i_L(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-4t})$

۴-۵-پاسخ کامل

در بخش‌های (۵-۲) و (۵-۳) بترتیب پاسخ مدارهای الکتریکی را ناشی از حالات اولیه سلف‌ها و خازن‌ها، و پاسخ مدار را نسبت به منابع ورودی بیان نمودیم که با نام‌های پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر مشخص کردیم. حال اگر مداری دارای منابع ورودی همراه با حالات اولیه برای سلف‌ها و خازن‌ها باشند، پاسخ مدار را پاسخ کامل^۱ می‌نامند. لذا می‌توان گفت که پاسخ‌های ورودی صفر و حالت صفر، حالت‌های خاصی از

^۱ - Complete Response

پاسخ کامل خواهند بود. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که پاسخ کامل هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، برابر مجموع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر خواهد بود. برای این منظور مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۴-۵) را در نظر بگیرید. در این مدار، فرض کنید که $i_S(t) = I_0$ و ولتاژ اولیه خازن در زمان $t=0$ هم $v_C(0) = V_0$ باشد که کلید در زمان $t=0$ از وضعیت a به b تغییر وضعیت می‌دهد، پس برای زمان $t \geq 0$ ، مدار الکتریکی هم دارای حالت اولیه خازن و هم منبع ورودی جریان است. با کاربرد قانون KCL در مدار مذکور خواهیم داشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = I_0 \quad v_C(0) = V_0, \quad t \geq 0 \quad (23-5)$$

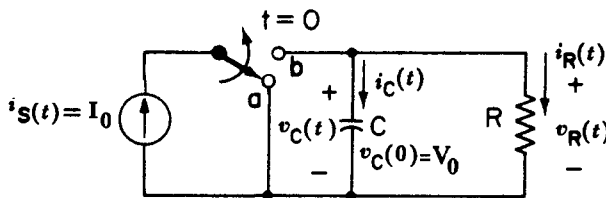
برای حل این مدار، سه پاسخ حالت صفر، ورودی صفر و پاسخ کامل را به‌طور جداگانه محاسبه نموده و نشان می‌دهیم که پاسخ کامل از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر نیز قابل محاسبه خواهد بود.

پاسخ ورودی صفر: معادله دیفرانسیل مدار در حالت ورودی صفر (یعنی $i_S(t) = 0$) برابر است با:

$$C \cdot \frac{dv'_C(t)}{dt} + \frac{v'_C(t)}{R} = 0 \quad v'_C(0) = V_0, \quad t \geq 0 \quad (24-5)$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v'_C(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (25-5)$$



شکل (۱۴-۵): مدار الکتریکی RC با منبع ورودی و حالت اولیه خازن

پاسخ حالت صفر: معادله دیفرانسیل مدار در وضعیت حالت صفر (یعنی $v_C(0) = 0$) برابر است با:

$$C \cdot \frac{dv''_C(t)}{dt} + \frac{v''_C(t)}{R} = I_0 \quad v''_C(0) = 0 \quad (26-5)$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v_C''(t) = R.I_o \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad t \geq 0 \quad (27-5)$$

پاسخ کامل: اکنون معادله دیفرانسیل مدار واقعی که همان معادله (۲۳-۵) می باشد را به طور مستقیم حل می کنیم. برای این منظور ابتدا جواب معادله همگن را محاسبه می نماییم:

$$v_{Ch}(t) = K.e^{-t/RC} \quad (28-5)$$

همچنین ساده ترین جواب خصوصی معادله (۲۳-۵) به صورت $v_{Cp}(t) = R.I_o$ می باشد و در نتیجه، جواب کلی معادله (۲۳-۵) برابر خواهد بود با:

$$v_C(t) = v_{Ch}(t) + v_{Cp}(t) = K.e^{-t/RC} + R.I_o \quad (29-5)$$

حال برای تعیین ضریب مجهول K از شرط اولیه $v_C(0) = V_o$ در زمان $t=0$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} V_o &= K + R.I_o \\ K &= V_o - R.I_o \end{aligned} \quad (30-5)$$

با جایگذاری رابطه (۳۰-۵) در (۲۹-۵) پاسخ کامل مدار برابر است با:

$$v_C(t) = (V_o - R.I_o).e^{-t/RC} + R.I_o \quad (31-5)$$

با مرتب سازی معادله (۳۱-۵) خواهیم داشت:

$$v_C(t) = \left[V_o.e^{-t/RC} \right] + \left[R.I_o \left(1 - e^{-t/RC} \right) \right] \quad (32-5)$$

که در این معادله، جمله داخل کروشه اول، همان پاسخ ورودی صفر ارائه شده در معادله (۲۵-۵)، و جمله داخل کروشه دوم، پاسخ حالت صفر ارائه شده در معادله (۲۷-۵) خواهد بود. به عبارت دیگر، پاسخ کامل مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، از جمع پاسخ های ورودی صفر و حالت صفر تعیین می شوند.

مثال (۵-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۴-۵) اگر $R = \frac{1}{3}\Omega$ ، $C = \frac{1}{3}\mu F$ ، $I_o = 2A$ و $v_C(0) = -3V$ باشد، نحوه تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید و نشان دهید که از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر به دست می آید.

حل: با استفاده از معادله (۲۵-۵) پاسخ ورودی صفر برابر است با:

$$v_C'(t) = -3 \times e^{-4t} \quad t \geq 0$$

همچنین با استفاده از معادله (۲۷-۵) پاسخ حالت صفر به صورت زیر تعیین می شود:

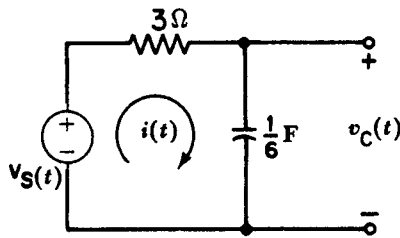
$$v_C''(t) = (1 - e^{-4t}) \quad t \geq 0$$

از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر خواهیم داشت:

$$v_C(t) = 1 - 4e^{-4t} \quad t \geq 0$$

حال اگر از معادله (۳۱-۵) که پاسخ کامل مدار است، استفاده کنیم به رابطه اخیر خواهیم رسید.

تمرین (۵-۵): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۱۵)، فرض کنید که $v_S(t) = 2V$ و $v_C(0) = 1V$ باشد. برای زمان $t \geq 0$ ، ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۵)

جواب: $v_C(t) = 2 - e^{-2t} (V)$ ، $i(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} (A)$

۵-۵- شرایط اولیه در مدارهای با کلیدزنی

در این بخش به بررسی شرایط اولیه خازن‌ها و سلف‌ها در زمان‌های کلیدزنی می‌پردازیم. در فرآیند کلیدزنی در مدارهای الکتریکی مورد بحث، فرض می‌شود که کلیدزنی در لحظه $t = 0$ اتفاق افتد. لذا مناسب است که وضعیت مدار را قبل از کلیدزنی و بعد از کلیدزنی از هم متمایز نماییم. به همین منظور از نماد 0^- برای نشان دادن لحظه قبل از کلیدزنی و از نماد 0^+ برای نشان دادن لحظه بعد از کلیدزنی استفاده می‌شود. در فصل چهارم، عنصر خازن را به‌عنوان یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی مطرح نمودیم که روابط زیر برای آن صادق می‌باشد:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (۳۳-۵)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot v_C^2 \quad (۳۴-۵)$$

رابطه (۳۳-۵) نشان می‌دهد که هر تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن (یعنی $\frac{dv_C(t)}{dt} = \infty$) نیاز به یک جریان خازن به مقدار بینهایت خواهد بود. همچنین رابطه (۳۴-۵) نشان می‌دهد که تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن، باعث تغییر ناگهانی در انرژی ذخیره‌شده در خازن می‌شود که آن هم نیاز به یک منبع با توان بینهایت می‌باشد که هر دو واقعه، غیرممکن می‌باشد. لذا با توجه به آنکه تغییرات جریان نمی‌تواند بینهایت باشد، در نتیجه می‌توان گفت که ولتاژ خازن در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به‌طور ناگهانی تغییر کند. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) \quad (35-5)$$

این موضوع را می‌توان به‌گونه‌ای دیگر برای عنصر سلف بیان نمود. در فصل چهارم برای عنصر سلف روابط زیر را ارائه نمودیم:

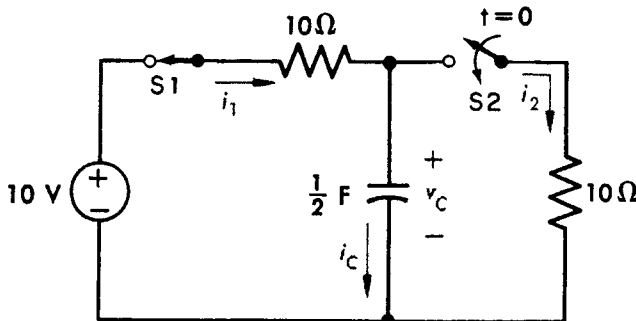
$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (36-5)$$

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \quad (37-5)$$

حال اگر جریان سلف در لحظه کلیدزنی تغییر ناگهانی داشته باشد (یعنی $\frac{di_L(t)}{dt} = \infty$) ولتاژ دو سر سلف باید به یک مقدار بینهایتی تغییر یابد. همچنین نیاز به یک توان بینهایت خواهد بود که هر دو وضعیت، غیرممکن می‌باشد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که جریان سلف در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به‌طور ناگهانی تغییر یابد. لذا خواهیم داشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) \quad (38-5)$$

مثال (۶-۵): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۶-۵) فرض می‌شود که کلید S_1 به مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t=0$ ، کلید S_2 نیز بسته می‌شود. مقادیر $v_C(o^+)$ و $i_C(o^+)$ را (یعنی ولتاژ و جریان خازن، پس از لحظه بسته شدن کلید S_2) بیابید.



شکل (۱۶-۵): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۶-۵)

حل: با توجه به آنکه کلید S۱ به مدت طولانی بسته بوده است، لذا عنصر خازن به صورت اتصال باز در می آید و در نتیجه ولتاژ خازن به ۱۰V افزایش می یابد. در این حالت، دیگر هیچ جریانی از مدار نمی گذرد. یعنی،

$$v_C(o^-) = 10V, \quad i_C(o^-) = 0A$$

در لحظه $t = 0$ که کلید S۲ نیز بسته می شود، با توجه به آنکه ولتاژ دو سر خازن نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند، لذا با توجه به اصل پیوستگی ولتاژ خازن خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) = 10V$$

حال برای یافتن $i_C(o^+)$ کافی است که در زمان $t = 0^+$ ، قانون KVL را برای هر دو حلقه مدار بنویسیم:

$$10 - 10i_1(o^+) - v_C(o^+) = 0$$

$$v_C(o^+) - 10i_4(o^+) = 0$$

و با استفاده از قانون KCL برای گره مدار داریم:

$$i_1(o^+) = i_4(o^+) + i_C(o^+)$$

از حل سه معادله اخیر خواهیم داشت:

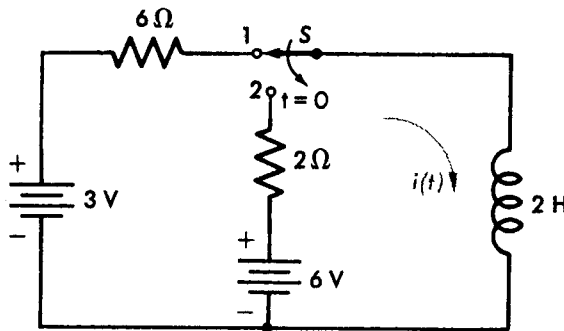
$$i_1(o^+) = 0A$$

$$i_4(o^+) = 1A$$

$$i_C(o^+) = -1A$$

مثال (۷-۵): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۵) مورد نظر می باشد. در این مدار، کلید S به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و در لحظه $t = 0$ در وضعیت ۲ قرار می گیرد. مطلوبست تعیین:

الف) جریان سلف $i_L(t)$ برای $t \geq 0$ ؛ ب) مقادیر $v_L(o^-)$ ، $v_L(o^+)$ و $\frac{di_L(o^-)}{dt}$



شکل (۷-۵): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۵)

حل: الف) در زمان $t < 0$ که کلید به مدت طولانی در وضعیت ۱ قرار داشته است، سلف به صورت اتصال کوتاه در می آید. لذا،

$$i_L(o^-) = \frac{3}{6} = 0.5 \text{ A}$$

با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف در وضعیت کلید، می توان نوشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) = 0.5 \text{ A}$$

حال برای یافتن جریان سلف در زمان $t \geq 0$ ، باید با استفاده از قانون KVL، معادله دیفرانسیل مدار را به صورت زیر مشخص نمود:

$$2 \frac{di_L(t)}{dt} + 2i_L(t) = 6, \quad i_L(o^+) = 0.5 \text{ A}$$

با تعیین جواب معادله همگن و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اخیر، جریان $i_L(t)$ را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$i_L(t) = 3 - 2.5e^{-t} \text{ (A)}$$

ب) با توجه به اتصال کوتاه شدن سلف در زمان قبل از تغییر وضعیت کلید، نتیجه می گیریم که $v_L(o^-) = 0$ می باشد. در لحظه $t = o^+$ با استفاده از قانون KVL در این زمان می توان نوشت:

$$v_L(o^+) + i_L(o^+) \times 2 = 6$$

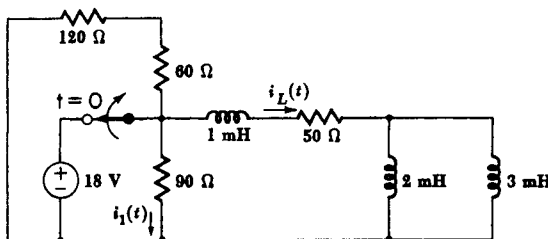
و در نتیجه،

$$v_L(o^+) = 6 - (0.5) \times 2 = 5 \text{ V}$$

بنابراین با توجه به رابطه $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ داریم:

$$\frac{di_L(o^+)}{dt} = \frac{v_L(o^+)}{L} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ A/sec}$$

تمرین (۵-۶): برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۱۸) فرض می شود که کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده است و در زمان $t = 0$ باز می شود. در این مدار، جریان $i_L(t)$ و $i_1(t)$ را برای زمان $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۵-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۶)

جواب: $i_1(t) = -0.24e^{-5000t} \text{ (A)}$ ، $i_L(t) = 0.36e^{-5000t} \text{ (A)}$

۵-۶- خلاصه و نتیجه گیری

در فصل‌های دوم و چهارم، با عناصر مقاومت، سلف، خازن و منابع الکتریکی آشنا شدیم و در فصل سوم، تحلیل مدارهای الکتریکی مقاومتی را مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل به تحلیل مدارهای خطی مرتبه اول که شامل مدارهای RL یا RC بودند، پرداختیم. خلاصه این مباحث را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

- پاسخ ورودی صفر یک مدار الکتریکی به این معنا است که در سیستم، هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته باشد و پاسخ مدار، فقط تحت تأثیر شرایط اولیه سلف‌ها یا خازن‌های مدار باشند. شرایط اولیه برای عنصر سلف، جریان اولیه آن (یعنی $i_L(0)$) و برای عنصر خازن، ولتاژ اولیه آن (یعنی $v_C(0)$) می‌باشد.

- در صورتی که در یک مدار الکتریکی، پاسخ مدار را بر اساس منابع الکتریکی ورودی به دست آورده و اثر شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها را در تحلیل مدار در نظر نگیریم، آن پاسخ را پاسخ حالت صفر می‌گوییم.

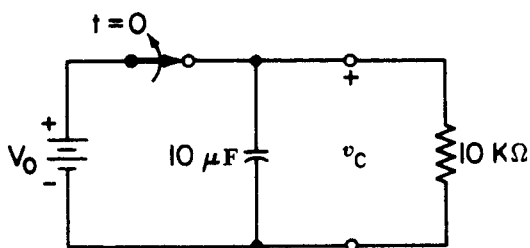
- در صورتی که یک مدار الکتریکی تحت تأثیر منابع ورودی و شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها باشند، با تحلیل آن به پاسخ کامل مدار دسترسی پیدا کرده‌ایم. این پاسخ کامل مدار را می‌توان از جمع کردن پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر مدار به دست آورد.

- با توجه به آنکه در عنصر خازن، ولتاژ آن در زمان کلیدزنی، قادر به تغییر ناگهانی نیست، لذا با انجام کلیدزنی در زمان $t=0$ در هر مدار الکتریکی، $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ خواهد بود.

- عمل کلیدزنی در مدارهای الکتریکی RL باعث تغییر ناگهانی جریان سلف‌ها نخواهد شد. زیرا لازمه این امر نیاز به ایجاد یک ولتاژ بینهایت در دو سر سلف است. در نتیجه در زمان کلیدزنی در $t=0$ و برای عنصر سلف، رابطه $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ صادق خواهد بود.

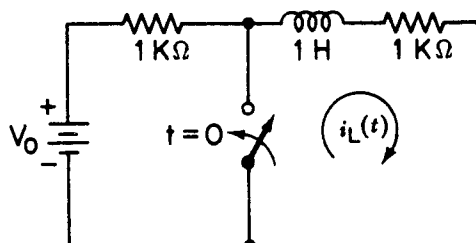
۵-۷- مسائل مروری

۱- در صورتی که در مدار ارائه شده در شکل (۵-۱۹) کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز گردد، ولتاژ دو سر خازن را برای زمان $t \geq 0$ بیابید.



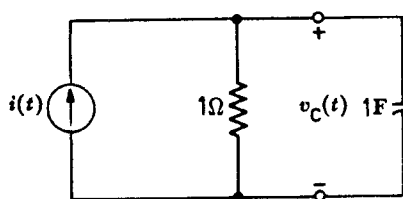
شکل (۵-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- مدار الکتریکی مطابق با شکل (۵-۲۰) موردنظر می‌باشد. در این مدار، کلید موردنظر به مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. تغییرات جریان $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.

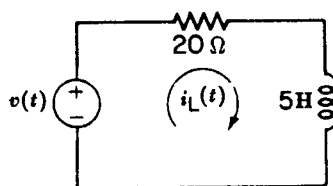


شکل (۵-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- در دو مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۱)، فرض کنید که در مدار (الف)، $i = 5A$ و $v_C(0) = 0V$ و در مدار (ب) $v = 5V$ و $i(0) = 1A$ باشد. در مدار (الف) $v_C(t)$ در مدار (ب) $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



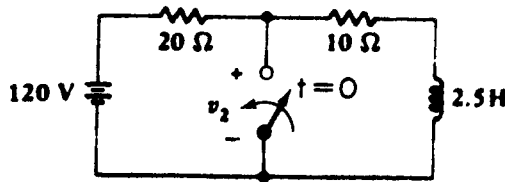
(الف)



(ب)

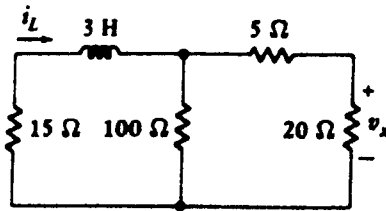
شکل (۵-۲۱): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۲)، کلید موردنظر که به مدت طولانی باز بوده است در زمان $t=0$ بسته می‌شود. در این مدار، جریان سلف را برای $t \geq 0$ تعیین نمایید.



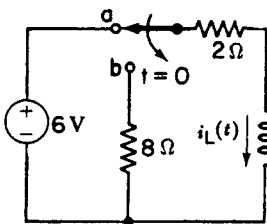
شکل (۵-۲۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- شکل (۵-۲۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در زمان $t=0$ ، $i_L(0)=10\text{ A}$ می‌باشد. برای $t \geq 0$ ، $i_L(t)$ و $v_x(t)$ را بیابید.

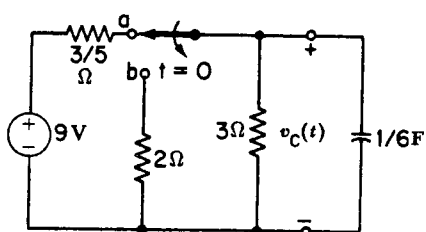


شکل (۵-۲۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۴) در زمان $t=0$ ، کلید از وضعیت a (که به مدت طولانی در این وضعیت قرار داشته است) به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در مدار (الف)، جریان $i_L(t)$ و در مدار (ب)، ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.



(الف)

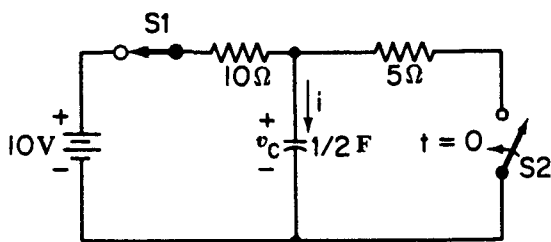


(ب)

شکل (۵-۲۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۶)

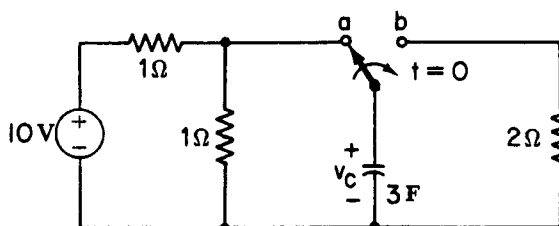
۷- شکل (۵-۲۵) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، کلید S_1 به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ ، کلید S_2 نیز بسته می‌شود. در این حالت، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.

راهنمایی: از تبدیل مدار معادل تونن به نورتن استفاده کنید.



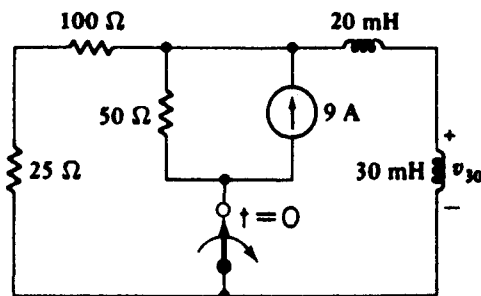
شکل (۵-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۶) کلید موردنظر به مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته و در زمان $t = 0$ در وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



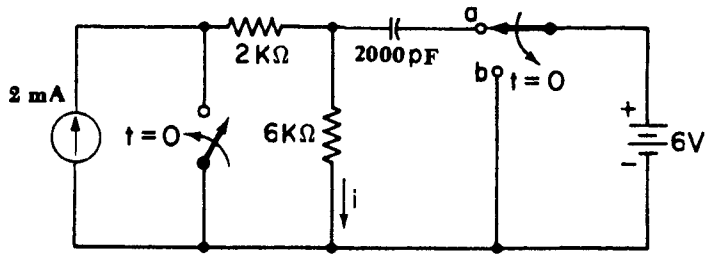
شکل (۵-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- کلید موردنظر در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۷) به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ باز می‌شود. برای زمان $t \geq 0$ ، $v_{30}(t)$ را بیابید.



شکل (۵-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۸) کلید سمت چپ در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود و همزمان با آن، کلید سمت راست از وضعیت a به b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، $v_C(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۵-۲۸): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

فصل ششم

مدارهای الکتریکی مرتبه دوم

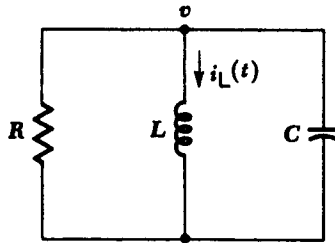
۶-۱- مقدمه

در فصل قبلی، مدارهای خطی مرتبه اول را که به صورت مدارهای الکتریکی RL یا RC بودند مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم. در این نوع مدارها، پاسخ کامل را از مجموع دو پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر به دست آوردیم. پاسخ حالت صفر، مربوطه به مدار مرتبه اولی بود که عناصر سلف‌ها یا خازن‌های مدار، فاقد شرایط اولیه می‌باشند. همچنین پاسخ ورودی صفر را در ارتباط با پاسخ سیستم در عدم وجود منابع الکتریکی ورودی داشتیم. اکنون در این فصل می‌خواهیم مدارهای خطی مرتبه دوم را مطالعه کنیم. در تحلیل این گونه مدارها نیز مشابه فصل پنجم، از پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر استفاده می‌کنیم. برای این منظور از یک مدار ساده RLC در حالت سری و یا موازی کمک می‌گیریم و پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر آنها را به دست آورده و با جمع نمودن آنها پاسخ کامل مدار را تعیین می‌کنیم. البته در فصل‌های بعدی، روش‌های ساده‌تری بر مبنای پاسخ فرکانسی ارائه می‌گردد که ما را در حل هر چه بهتر و راحت‌تر این گونه مدارها کمک خواهد کرد.

۶-۲- پاسخ ورودی صفر - تحریک با شرایط اولیه

در این بخش می‌خواهیم پاسخ ورودی صفر مدارهای مرتبه دوم ساده را مورد بررسی قرار دهیم. در این مدارهای ساده، از یک مقاومت، سلف و خازن استفاده می‌شود که در دو

حالت سری و موازی در نظر می‌گیریم. بدین منظور یک مدار RLC موازی مطابق با شکل (۱-۶) در نظر بگیرید که بدون منبع الکتریکی ورودی بوده و دارای حالات اولیه‌ای به صورت ولتاژ اولیه خازن $v_C(o)$ و جریان اولیه سلف $i_L(o)$ می‌باشد.



شکل (۱-۶): مدار RLC موازی بدون منبع ورودی

در فصول دوم و چهارم، روابط اساسی برای عناصر مقاومت، سلف و خازن را به صورت زیر بیان نمودیم:

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad , \quad i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} \quad (۱-۶)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad , \quad i_L(t) = I_o + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau \quad (۲-۶)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad , \quad v_C(t) = V_o + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \quad (۳-۶)$$

از طرف دیگر با کاربرد قوانین KVL و KCL در شکل (۱-۶) خواهیم داشت:

$$v_R(t) = v_L(t) = v_C(t) = v(t) \quad (۴-۶)$$

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0 \quad (۵-۶)$$

با استفاده از روابط (۱-۶) تا (۴-۶) در معادله (۵-۶) می‌توان نوشت:

$$\frac{v_C(t)}{R} + I_o + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(\tau) d\tau + C \frac{dv_C(t)}{dt} = 0 \quad (۶-۶)$$

حال اگر از رابطه اخیر نسبت به زمان مشتق بگیریم به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دست خواهیم یافت:

$$C \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{L} v_C(t) = 0 \quad (۷-۶)$$

که شرایط اولیه این رابطه به صورت زیر است:

$$v_C(o) = V \quad , \quad i_L(o) = I_o$$

از حل معادله (۷-۶) می‌توان ولتاژ دو سر خازن را به دست آورد و پس از آن، دیگر متغیرهای مدار محاسبه می‌شود. راه حل دیگر مدار موردنظر آن است که جریان سلف

$i_L(t)$ را به عنوان متغیر اصلی انتخاب نماییم. بدین منظور با استفاده از روابط (۱-۶) تا (۴-۶) در رابطه (۵-۶) به معادله دیفرانسیل جریانی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\frac{v_L(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv_L(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + CL \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) &= 0\end{aligned}\quad (۸-۶)$$

که شرایط اولیه معادله دیفرانسیل اخیر به صورت زیر خواهد بود:

$$i_L(0) = I_0, \quad \frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} \quad (۹-۶)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۸-۶) فرض کنید که جواب آن به صورت $i_L(t) = K.e^{s.t}$ باشد. با جایگذاری این مقدار در معادله (۸-۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}s^2 \times K.e^{s.t} + \frac{1}{RC} s \times K.e^{s.t} + \frac{1}{LC} K.e^{s.t} &= 0 \\ \left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} \right) K.e^{s.t} &= 0\end{aligned}\quad (۱۰-۶)$$

که در این معادله، برای برقراری تساوی، یا باید چندجمله‌ای $s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}$ برابر صفر باشد و یا $K.e^{s.t}$ صفر گردد. جمله $K.e^{s.t}$ مخالف صفر است؛ زیرا در غیر این صورت جریان $i_L(t)$ صفر می‌شود که امکان‌پذیر نیست. پس نتیجه می‌گیریم که:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (۱۱-۶)$$

به معادله (۱۱-۶) معادله مشخصه^۱ مدار، و به چندجمله‌ای سمت چپ این معادله، چند جمله‌ای مشخصه^۲ می‌گویند. با تعیین ریشه‌های s_1 و s_2 این چند جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 = \frac{-1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{cases} \quad (۱۲-۶)$$

^۱ - Characteristic Equation

^۲ - Characteristic Polynomial

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر R ، L و C بستگی دارد که به چهار حالت میرایی شدید^۱، میرایی بحرانی^۲، میرایی ضعیف^۳ و بی‌اتلاف^۴ تقسیم می‌شود که نوع جواب پاسخ مدار به صورت‌های زیر خواهد بود:

(الف) **میرایی شدید:** در این حالت $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ خواهد بود؛ به عبارت دیگر، جمله زیر رادیکال در ریشه‌های معادله مشخصه، دارای مقدار مثبتی خواهد بود. لذا مقادیر s_1 و s_2 به صورت اعداد حقیقی منفی در می‌آیند و در نتیجه، پاسخ معادله (۸-۶) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (13-6)$$

که K_1 و K_2 با شرایط اولیه ارائه شده در روابط (۹-۶) به دست می‌آید.

(ب) **میرایی بحرانی:** این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ باشد. یعنی جمله زیر رادیکال، برابر صفر گردد. در نتیجه $s_1 = s_2 = s = \frac{-1}{2RC}$ خواهد بود و پاسخ مدار برابر است با،

$$i_L(t) = (K + K' t) e^{s t} \quad (14-6)$$

(ج) **میرایی ضعیف:** در این وضعیت $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ است و در نتیجه ریشه‌های معادله مشخصه s_1 و s_2 به صورت اعداد مختلط مزدوج در می‌آیند و لذا،

$$i_L(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (15-6)$$

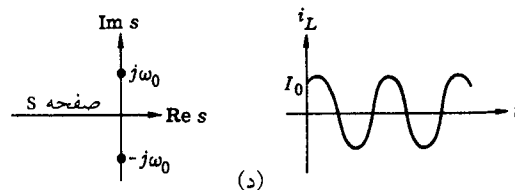
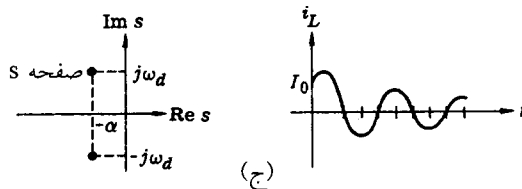
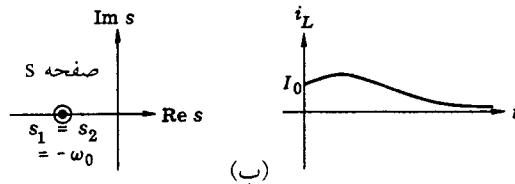
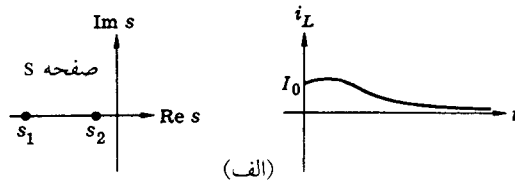
که در این رابطه $\alpha = \frac{1}{2RC}$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ خواهد بود. ضرایب K و θ هم مقادیر ثابتی بوده که از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

(د) **بی‌اتلاف:** در این حالت فرض می‌شود که مقدار $R = \infty$ باشد. در نتیجه $s_1 = j \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و $s_2 = -j \frac{1}{\sqrt{LC}}$ خواهد بود و در نهایت، پاسخ معادله دیفرانسیل (۸-۶) برابر خواهد بود با:

¹ - Over Damped
² - Critically Damped
³ - Under Damped
⁴ - Lossless

$$i_L(t) = K \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (۱۶-۶)$$

برای درک بهتر نحوه تغییرات شکل موج جریان $i_L(t)$ بر اساس مکان ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه، می‌توان به شکل (۲-۶) مراجعه نمود که صفحات مختلط سمت چپ این شکل، صفحه فرکانس مختلط^۱ می‌گویند. در حالت (الف)، دو ریشه معادله مشخصه به صورت اعداد حقیقی منفی بوده و میرایی شدید می‌باشد؛ در حالی که در شکل (ب) هر دو ریشه به صورت عدد حقیقی منفی و مساوی هم بوده و میرایی بحرانی را تشکیل می‌دهد. دو حالت (ج) و (د) هم وضعیت ریشه‌های معادله مشخصه را در حالت میرایی ضعیف و بی‌اتلاف نشان می‌دهد.



شکل (۲-۶): پاسخ‌های ورودی صفر مدار RLC موازی در حالت‌های مختلف

^۱ - Complex Frequency Plane

در انتهای این قسمت لازم است تا نحوه تعیین ضرایب K_1 و K_2 را با استفاده از شرایط اولیه بیان نماییم. بدین منظور فرض کنید که ریشه‌های معادله مشخصه، حالت میرایی شدید را ایجاد کند. یعنی،

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

حال با استفاده از روابط (۹-۶) داریم:

$$i_L(0) = K_1 + K_2 = I_0$$

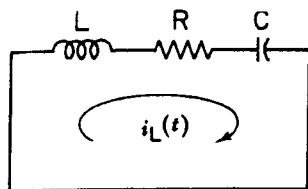
$$\frac{di_L(0)}{dt} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

که با حل این دو معادله اخیر، K_1 و K_2 به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$K_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right)$$

$$K_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right)$$

مثال (۶-۱): برای مدار خطی مرتبه دوم RLC سری ارائه شده در شکل (۶-۳) نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۶-۳): مدار خطی مرتبه دوم مربوط به مثال (۶-۱)

حل: با استفاده از قانون KVL در مدار الکتریکی شکل (۶-۳) خواهیم داشت:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0) = 0$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله اخیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (۶-۱۷)$$

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (۶-۱۷) برابر است با:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (۶-۱۸)$$

که دو ریشه معادله اخیر به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$s_1, s_2 = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (۶-۱۹)$$

اگر دو ریشه معادله مشخصه (۶-۱۸) به صورت میرایی شدید باشد، آنگاه جواب معادله (۶-۱۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (۶-۲۰)$$

که K_1 و K_2 از شرایط اولیه مدار به دست می آید.

تمرین (۶-۱): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۳)، فرض کنید که $R = 6\Omega$ ،

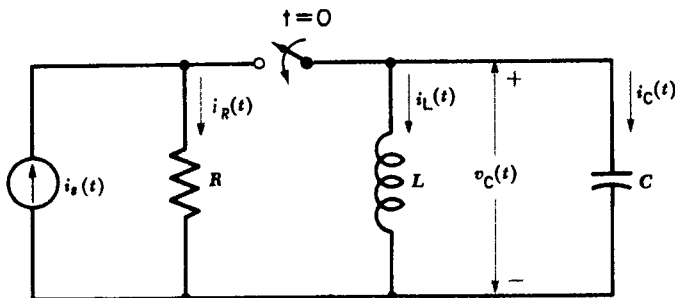
$L = 1H$ و $C = \frac{1}{5}F$ می باشد. اگر شرایط اولیه به صورت $i_L(0) = 1A$ و $\frac{di_L(0)}{dt} = 0A$ باشد جریان $i_L(t)$ را بیابید.

$$\text{جواب: } i_L(t) = \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t}$$

۶-۳- پاسخ حالت صفر- تحریک با منابع ورودی

در اینجا باز یک مدار RLC موازی را در نظر می گیریم که با منبع ورودی $i_s(t)$ و بدون حالات اولیه برای سلف و خازن می باشد. این مدار در شکل (۶-۴) نشان داده شده است. در این حالت، مدار با وجود اعمال منبع ورودی در زمان $t=0$ بدون هیچ گونه حالت اولیه ای برای زمان قبل از صفر می باشد. در این مدار با استفاده از قانون KCL در گره مدار می توان نوشت:

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = i_s(t) \quad (۶-۲۱)$$



شکل (۶-۴): مدار خطی مرتبه دوم در حالت پاسخ حالت صفر

با توجه به روابط ارائه شده برای عناصر سلف، خازن و مقاومت در بخش قبلی، معادله دیفرانسیل مدار به شکل زیر حاصل می گردد:

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_s(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad (۲۲-۶)$$

که شرط اولیه آن به مقدار صفر است. یعنی،

$$i_L(0) = 0 \quad , \quad \frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} = 0 \quad (۲۳-۶)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۲۲-۶) را در بخش قبلی نیز داشتیم؛ با این تفاوت که سمت راست معادله دیفرانسیل کنونی دارای منبع جریان $i_s(t)$ می‌باشد و همچنین شرایط اولیه نیز صفر می‌باشد. حال برای به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل (۲۲-۶)، باید بر اساس مطالب ارائه شده در فصل پنجم (برای مدارهای خطی مرتبه اول) جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $i_h(t)$ و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $i_p(t)$ را محاسبه نموده و با جمع کردن این دو جواب، $i_L(t)$ به دست می‌آید.

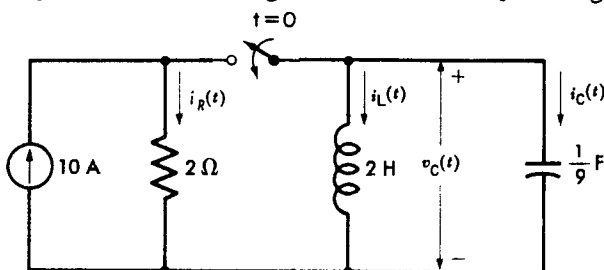
نحوه تعیین جواب معادله دیفرانسیل همگن را در بخش قبل بیان نمودیم که برای این جواب، چهار حالت میرایی شدید، میرایی بحرانی، میرایی ضعیف و بی‌اتلاف بیان نمودیم. به عنوان مثال برای میرایی شدید، جواب معادله دیفرانسیل همگن به صورت زیر می‌باشد:

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

از طرف دیگر، تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل، بستگی به نوع تابع منبع ورودی $i_s(t)$ دارد. در صورتی که $i_s(t)$ یک تابع پله با مقدار ثابت باشد آنگاه $i_p(t)$ را می‌توان به صورت یک تابع ثابت در نظر گرفت و اگر $i_s(t)$ تابعی سینوسی باشد مناسب است تا جواب خصوصی نیز به صورت تابع سینوسی انتخاب شود.

در نهایت با جمع کردن جواب خصوصی و جواب معادله دیفرانسیل همگن به جواب نهایی می‌رسیم که ضرایب مجهول K_1 و K_2 با استفاده از دو شرط اولیه مدار (یعنی روابط ارائه شده در معادله (۲۳-۶) محاسبه می‌گردد.

مثال (۲-۶): در مدار ارائه شده در شکل (۵-۶) فرض کنید که کلید S در زمان $t=0$ بسته شده و قبل از آن نیز $v_C(0) = i_L(0) = 0$ می‌باشد. ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۵-۶): مدار الکتریکی مرتبه دوم مربوط به مثال (۴-۶)

حل: با توجه به اینکه در مدار موردنظر، ولتاژ خازن $v_C(t)$ مجهول است، لذا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را می‌توان بر حسب این ولتاژ به دست آورد. بدین منظور با استفاده از قانون KCL داریم:

$$\frac{v_R(t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t v_L(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \frac{dv_C(t)}{dt} = 1. \quad (24-6)$$

با توجه به تساوی ولتاژهای دو سر مقاومت، سلف و خازن و با مشتق‌گیری مجدد از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} v_C(t) = 0 \quad (25-6)$$

در ابتدا جواب معادله دیفرانسیل همگن را به دست می‌آوریم. معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$\frac{1}{4} s^2 + \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} = 0$$

که با محاسبه ریشه‌های این معادله خواهیم داشت:

$$s_1 = -1/5, \quad s_2 = -3$$

از این مقادیر در می‌یابیم که پاسخ مدار به صورت میرایی شدید است و لذا جواب معادله دیفرانسیل همگن به صورت زیر در می‌آید:

$$v_h(t) = K_1 e^{-1/5t} + K_2 e^{-3t} \quad (26-6)$$

با توجه به آنکه سمت راست معادله (25-6) برابر صفر می‌باشد، لذا جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نیز صفر می‌باشد. البته در صورتی که معادله دیفرانسیل را بر اساس جریان سلف می‌نوشتیم، معادله مذکور هم دارای جواب معادله دیفرانسیل همگن و هم جواب خصوصی می‌بود. توجه فیزیکی صفر بودن جواب خصوصی را می‌توان به این صورت بیان نمود که با توجه به آنکه منبع ورودی، یک جریان ثابت dc به مقدار 10A است، لذا سلف به صورت اتصال کوتاه در آمده و ولتاژ دو سر آن (که همان ولتاژ خازن نیز می‌باشد) صفر خواهد بود. پس جواب نهایی، همان پاسخ (26-6) است که ضرایب K_1 و K_2 با استفاده از شرایط اولیه محاسبه می‌شوند.

با توجه به غیر قابل تغییر بودن ناگهانی متغیرهای جریان سلف و ولتاژ خازن نتیجه می‌گیریم که،

$$i_L(o^+) = 0, \quad v_C(o^+) = 0$$

با استفاده از کاربرد قانون KCL در زمان $t = o^+$ می‌توان نوشت:

$$i_R(o^+) + i_L(o^+) + i_C(o^+) = 1.$$

و چون $i_R(o^+) = 0$ است (زیرا ولتاژ دو سر آن که همان $v_C(o^+)$ است صفر می‌باشد) آنگاه،

$$0 + 0 + i_C(o^+) = 10$$

و در نتیجه $i_C(o^+) = 10 \text{ A}$ می‌گردد. در نهایت با استفاده از رابطه $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\frac{dv_C(o^+)}{dt} = \frac{i_C(o^+)}{C} = \frac{10}{\frac{1}{9}} = 90 \text{ A/sec}$$

با استفاده از $v_C(o^+)$ و $\frac{dv_C(o^+)}{dt}$ ، مقادیر K_1 و K_2 با دو معادله زیر محاسبه می‌شود. بدین منظور داریم:

$$\begin{cases} v_C(o^+) = 0 = K_1 + K_2 \\ \frac{dv_C(o^+)}{dt} = 90 = -1/5 K_1 - 3 K_2 \end{cases}$$

و با حل دو معادله اخیر $K_1 = 60$ و $K_2 = -60$ به دست می‌آید. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶-۲۶)، ولتاژ $v_C(t)$ به دست می‌آید.

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t) = 60e^{-1/5t} - 60e^{-3t}$$

تمرین (۶-۲): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۵) و در شرایط مثال (۶-۲)، الف)

اگر مقدار خازن به $C = \frac{1}{4} \text{ F}$ تغییر یابد ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید؛ ب)

اگر مقدار خازن به $C = \frac{1}{8} \text{ F}$ تغییر یابد ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.

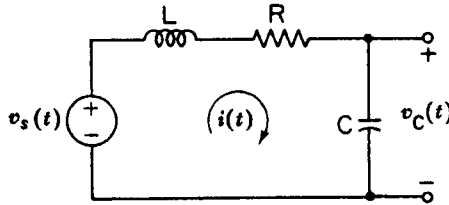
جواب: الف) $v_C(t) = 40e^{-t} \cos(t - \pi/4)$ (ب) $v_C(t) = 80te^{-2t}$

۶-۴- پاسخ کامل مدارهای خطی مرتبه دوم

مشابه آنچه که در فصل پنجم هم بیان نمودیم، هر مدار الکتریکی خطی که دارای منابع الکتریکی ورودی و حالات اولیه برای سلف‌ها و خازن‌ها می‌باشند، دارای پاسخ کاملی خواهند بود که از جمع جبری پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر مهیا می‌گردد. البته پاسخ کامل این مدارها را نیز می‌توان به طور مستقیم بیان نمود. برای این منظور، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۶) را در نظر بگیرید که دارای منبع الکتریکی ورودی با ولتاژ $v_s(t)$ بوده و سلف مدار دارای جریان اولیه $i_L(o)$ و خازن مدار نیز دارای ولتاژ

اولیه $v_C(o)$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه دوم این مدار، قانون KVL را برای حلقه موجود می‌نویسیم:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + v_C(o) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_s(t) \quad (27-6)$$



شکل (۶-۶): مدار الکتریکی RLC با وجود منبع ورودی و شرایط اولیه

با استفاده از روابط (۱-۶) تا (۳-۶) که برای عناصر مقاومت، سلف و خازن بیان نمودیم، رابطه اخیر را می‌توان به‌شکل زیر بیان نمود:

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t) \quad (28-6)$$

با توجه به آنکه حالات اولیه مدار به‌صورت $v_C(o) = V(o)$ و $i_L(o) = I(o)$ می‌باشد لذا شرایط اولیه معادله دیفرانسیل ناهمگن (۲۸-۶) برابر خواهد بود با:

$$v_C(o) = V(o) \quad , \quad \frac{dv_C(o)}{dt} = \frac{i_C(o)}{C} = \frac{i_L(o)}{C} = \frac{I(o)}{C} \quad (29-6)$$

اکنون برای حل معادله دیفرانسیل ناهمگن (۲۸-۶) با شرایط اولیه مشخص شده در رابطه (۲۹-۶) می‌توان از دو روش استفاده نمود. یک روش آن است که پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر را بر اساس مطالب ارائه شده در بخش‌های (۲-۶) و (۳-۶) محاسبه نموده و با هم جمع کنیم. روش دوم آن است که معادله دیفرانسیل همگن و جواب خصوصی مربوط به معادله (۲۸-۶) را به‌دست آورده و با هم جمع نماییم. در این حالت با توجه به شرایط اولیه ارائه شده در معادله (۲۹-۶) ضرایب ثابت جواب به‌دست آمده و در نهایت، به‌طور مستقیم به پاسخ کامل مدار دسترسی پیدا کرده ایم.

مثال (۳-۶): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۶) فرض کنید که $R = 6\Omega$ ،

$L = 1H$ ، $C = \frac{1}{5}F$ و $v_s(t) = \frac{t}{3}$ می‌باشد. در صورتی که در زمان $t = 0$ ، مقادیر

$v_C(o) = 1V$ و $i_L(o) = \frac{2}{5}A$ را داشته باشیم، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده از معادله (۲۸-۶) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{6}{5} \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = \frac{t}{3}, \quad t \geq 0$$

جواب معادله همگن این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برابر است با:

$$v_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-5t}$$

با توجه به آنکه ولتاژ منبع به صورت خطی و برابر $\frac{t}{3}$ است، پس جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$v_p(t) = A + B.t$$

که با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مدار، ضرایب A و B به دست می آید که،

$$v_p(t) = \frac{-2}{5} + \frac{t}{3}$$

در نهایت با جمع کردن جواب معادله همگن و جواب خصوصی می توان نوشت:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-5t} - \frac{2}{5} + \frac{t}{3}$$

برای تعیین ضرایب K_1 و K_2 ، از شرایط اولیه مدار در زمان $t=0$ استفاده می شود. لذا،

$$\begin{cases} v_C(0) = 1 = K_1 + K_2 - \frac{2}{5} \\ \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = 2 = -K_1 - 5K_2 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

با حل دو معادله اخیر ضرایب K_1 و K_2 به صورت زیر به دست می آید:

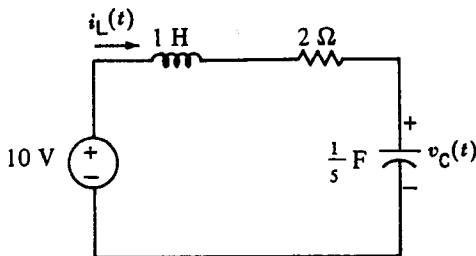
$$K_1 = \frac{13}{6}, \quad K_2 = -\frac{23}{3}.$$

لذا جواب نهایی برابر خواهد بود با:

$$v_C(t) = \frac{13}{6} e^{-t} - \frac{23}{3} e^{-5t} - \frac{2}{5} + \frac{t}{3}$$

تمرین (۳-۶): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۶) مورد نظر است. در صورتی که

در این مدار $v_C(0) = 6V$ و $i_L(0) = 2A$ باشد، مقدار $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۷-۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۶)

جواب: $v_C(t) = e^{-t}(-4\cos 2t + 3\sin 2t) + 10$

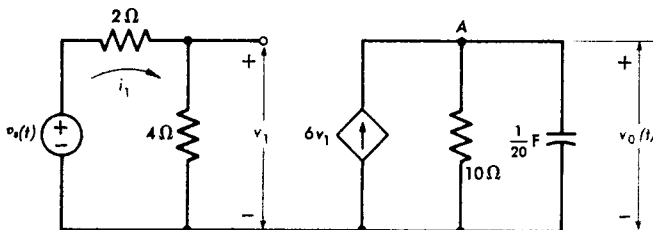
۶-۵- پاسخ مدارهای خطی به ورودی تابع پله

در اکثر مدارهای الکتریکی، تحریک مدار در زمان خاصی اتفاق می‌افتد که معمولاً این زمان را در لحظه $t=0$ در نظر می‌گیریم. برای بیان عمل کلیدزنی و اعمال منبع ورودی به یک مدار می‌توان از تابع پله واحد استفاده نمود. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۳۰-۶)$$

این تابع به این معنی است که در قبل از زمان صفر، مقدار تابع، صفر بوده و پس از این زمان، به مقدار واحد خواهد بود. بر این اساس، اگر منبع ولتاژی به صورت $v(t) = 10u(t)$ باشد، این بدان معنی است که مقدار این منبع در زمان $t < 0$ برابر صفر بوده و برای زمانهای $t > 0$ مقدار ولتاژ منبع برابر $10V$ ثابت خواهد ماند. اکنون با اعمال یک تابع پله‌ای به عنوان ورودی مدار الکتریکی، پاسخ مدار را می‌توان به کمک روش‌های ارائه شده در بخش‌های قبلی به دست آورد. سپس با اعمال منبع ورودی پله، فقط ورودی به ازای $t > 0$ ایجاد شده و در $t < 0$ صفر و بی‌اثر می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر ورودی پله به صورت منبع ولتاژ باشد، به ازای $t < 0$ ، منبع موردنظر، اتصال کوتاه می‌گردد و اگر ورودی پله، یک منبع جریان باشد، به ازای $t < 0$ ، منبع موردنظر، اتصال باز خواهد بود. پس اگر هیچ منبع ورودی به ازای $t < 0$ اثری در مدار نداشته باشد، آنگاه خازن‌ها در $t=0$ دارای ولتاژ اولیه نبوده و سلف‌ها نیز در $t=0$ فاقد جریان اولیه هستند.

مثال (۴-۶): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۶) فرض کنید که منبع ولتاژ ورودی به صورت $v_s(t) = 0.25u(t)$ باشد. ولتاژ اولیه خازن در زمان $t=0$ را صفر در نظر بگیرید. در این مدار، $v_o(t)$ را بیابید.



شکل (۸-۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۴-۶)

حل: در ابتدا باید معادله دیفرانسیل مدار را به دست آوریم. بدین منظور با استفاده از قانون KCL برای گره A خواهیم داشت:

$$-6v_1(t) + \frac{1}{10}v_o(t) + \frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt} = 0$$

برای حذف متغیر $v_1(t)$ در معادله دیفرانسیل اخیر، باید برای حلقه سمت چپ مدار، معادله KVL را بنویسیم. لذا:

$$v_s(t) = 6i_1$$

$$v_1(t) = 4i_1 = \frac{4}{6}v_s(t) = \frac{2}{3}v_s(t)$$

با جایگزینی رابطه اخیر در معادله دیفرانسیل مدار می توان نوشت:

$$\frac{1}{10}v_o(t) + \frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{12}{3}v_s(t)$$

$$\frac{1}{10}v_o(t) + \frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt} = u(t)$$

این معادله دیفرانسیل برای $t > 0$ به خاطر ورودی $u(t)$ به شکل زیر تغییر می یابد:

$$\frac{1}{10}v_o(t) + \frac{1}{20}\frac{dv_o(t)}{dt} = 1$$

با توجه به آنکه معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل به صورت $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}s = 0$ است لذا پاسخ معادله همگن این معادله دیفرانسیل برابر خواهد بود با:

$$v_{oh}(t) = Ke^{-2t}$$

همچنین جواب خصوصی این معادله برابر $v_{op}(t) = 10$ است. در نتیجه جواب کل برابر است با:

$$v_o(t) = 10 + Ke^{-2t}$$

با توجه به شرایط اولیه مدار که $v_o(0) = 0$ است، لذا ضریب K برابر مقدار -10 انتخاب می شود. در نهایت جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر در می آید:

$$v_o(t) = 10(1 - e^{-2t}) \cdot u(t)$$

۶-۶- خلاصه و نتیجه گیری

در این فصل، به منظور تکمیل بحث ارائه شده در فصل پنجم، که در ارتباط با مدارهای خطی مرتبه اول بود، به بررسی و تحلیل مدارهای الکتریکی مرتبه دوم پرداختیم. این نوع مدارها را می توان با استفاده از عناصر سلف، خازن و مقاومت در کنار یکدیگر ایجاد نمود. خلاصه مباحث ارائه شده در این فصل را می توان به صورت زیر ارائه نمود:

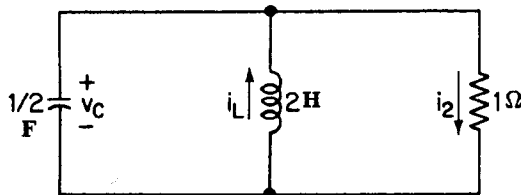
● مشابه مدارهای خطی مرتبه اول، در تحلیل مدارهای خطی مرتبه دوم نیز باید معادلات دیفرانسیلی را حل نمود که در این نوع مدارها از نوع مرتبه دوم می‌باشد. برای حل این معادله دیفرانسیل باید دو شرط اولیه در این مدار را داشته باشیم.

● در مدارهای خطی مرتبه دوم از دو روش می‌توان استفاده نمود. یک روش آن است که پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر مدار را به دست آورده و با جمع نمودن این دو، پاسخ کامل مدار را به دست آوریم. روش دوم آن است که به طور مستقیم، پاسخ مدار را تعیین نماییم. بدین معنی که با تعیین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مدار و با حل مستقیم آن، جواب موردنظر را مشخص نماییم.

● مقدار ریشه‌های معادله مشخصه، بستگی به مقادیر R ، L و C مدار دارد. بعلاوه با توجه به این مقادیر و تغییر مکان ریشه‌های معادله مشخصه، درمی‌یابیم که پاسخ مدار به چهار حالت میرایی شدید، میرایی بحرانی، میرایی ضعیف و بی‌اتلاف امکان‌پذیر خواهد بود.

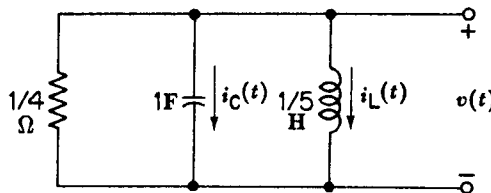
۶-۷- مسائل مروری

۱- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۹) فرض کنید که $i_L(0) = \frac{3}{5}A$ و $v_C(0) = 0V$ باشد. در این مدار جریان $i_T(t)$ را بیابید.



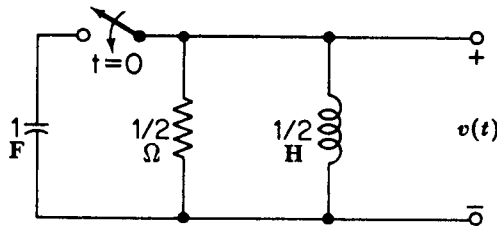
شکل (۶-۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

۲- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۰) فرض کنید که $v(0) = 1V$ و $v'(0) = 0$ باشد. در این مدار برای زمان $t \geq 0$ مطلوبست: الف) ولتاژ $v(t)$ ؛ ب) جریان $i_L(t)$ ؛ ج) جریان $i_C(t)$.



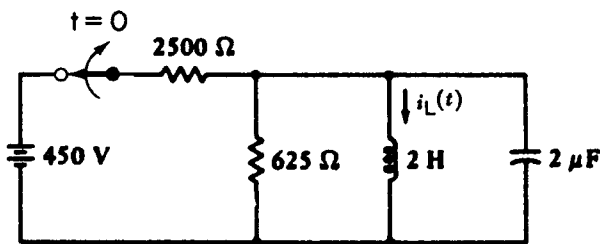
شکل (۶-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

۳- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۱)، قبل از بسته شدن کلید در زمان $t=0$ ، خازن به مقدار $3V$ شارژ شده است. پس از بسته شدن کلید و برای زمان $t \geq 0$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



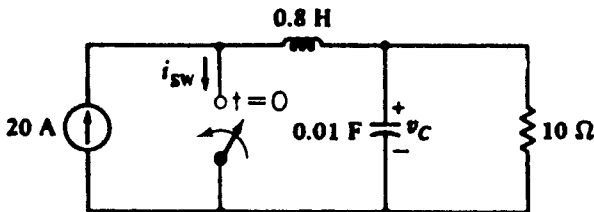
شکل (۶-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۳)

۴- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۲)، کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می شود. نحوه تغییرات جریان $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



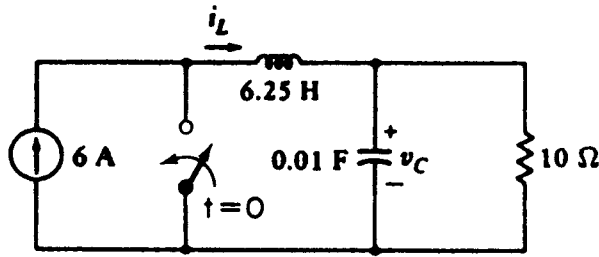
شکل (۶-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

۵- مدار الکتریکی در شکل (۶-۱۳) موردنظر است. در این مدار، کلید به مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=0$ بسته می گردد. برای زمان $t \geq 0$ نحوه تغییرات $v_C(t)$ و $i_{sw}(t)$ را بیابید.



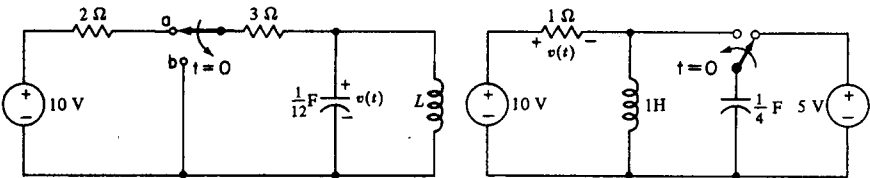
شکل (۶-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

۶- کلید مدار ارائه شده در شکل (۶-۱۴) به مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می شود. مقادیر $v_C(t)$ و $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



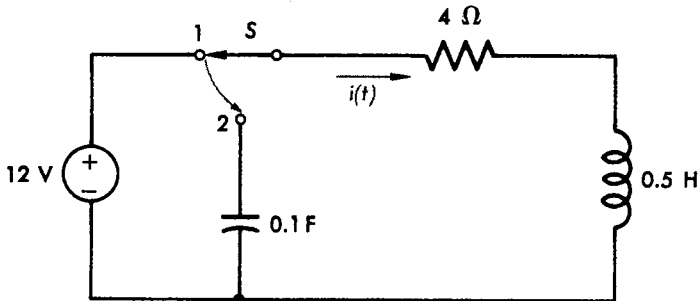
شکل (۶-۱۴): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۶)

۷- در مدارهای الکتریکی شکل (۶-۱۵) کلید پس از مدت زمان طولانی و در زمان $t=0$ تغییر وضعیت می‌دهند. در این دو مدار، $v(t)$ را بیابید.



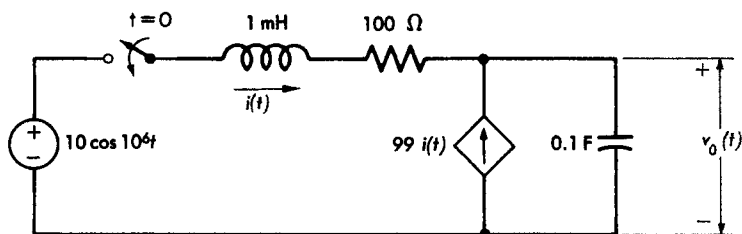
شکل (۶-۱۵): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۷)

۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۶)، کلید S به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده و در زمان $t=0$ به وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. برای زمان $t \geq 0$ جریان $i(t)$ را بیابید.



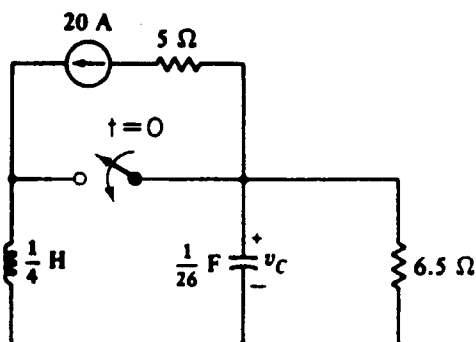
شکل (۶-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

۹- شکل (۶-۱۷) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که کلید S به مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌شود. مقدار $v_o(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



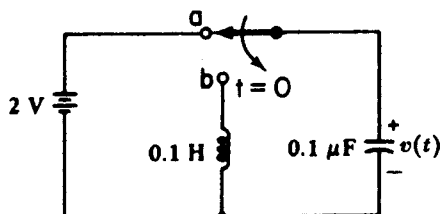
شکل (۶-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

۱۰- کلید مشخص شده در مدار ارائه شده در شکل (۶-۱۸) به مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می شود. در این مدار، تغییرات ولتاژ و لثاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



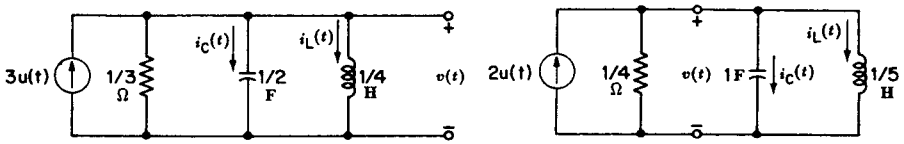
شکل (۶-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

۱۱- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۱۹)، کلید مدار به مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده قرار دارد. سپس در زمان $t=0$ کلید، تغییر وضعیت می دهد. در این حالت برای زمان $t \geq 0$ ، ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



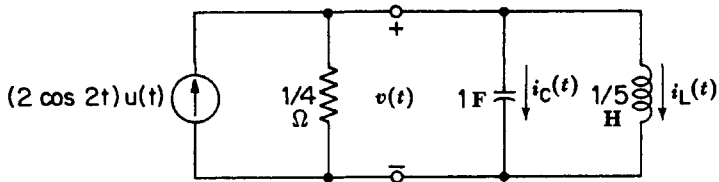
شکل (۶-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۱)

۱۲- برای مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۲۰)، فرض کنید که $v(0) = 0V$ و $i_L(0) = 0A$ باشد. در این دو مدار، متغیرهای $v(t)$ و $i_L(t)$ را برای زمان $t \geq 0$ بیابید.



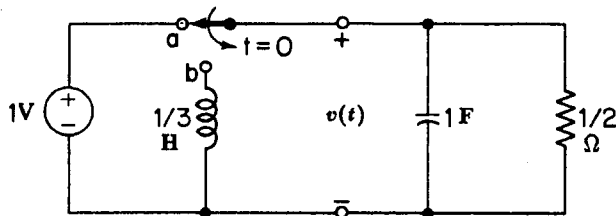
شکل (۶-۲۰): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۱۲)

۱۳- در مدار الکتریکی شکل (۶-۲۱)، فرض می‌شود که $v(0) = 0V$ و $v'(0) = 0$ باشد. در این حالت، نحوه تغییرات $v(t)$ ، $i_C(t)$ و $i_L(t)$ را به دست آورید.



شکل (۶-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۳)

۱۴- کلید مشخص شده در مدار شکل (۶-۲۲) به مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته است و در زمان $t = 0$ به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این مدار و برای زمان $t \geq 0$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



شکل (۶-۲۲): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۴)

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل مدارها در حالت دائمی سینوسی

۷-۱- مقدمه

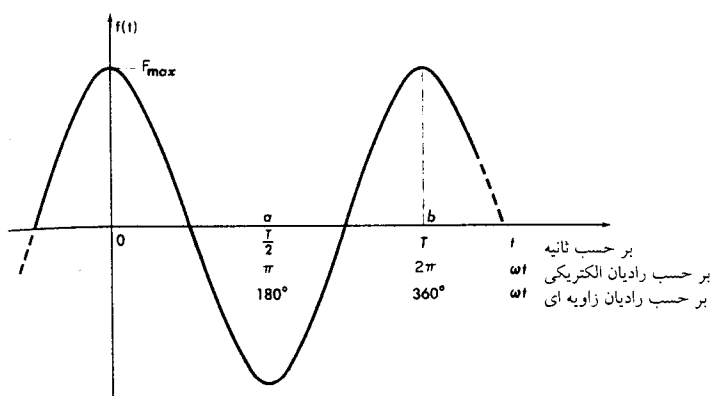
امواج سینوسی در علوم مهندسی، نقش مهمی را بازی می‌کنند. برای درک اهمیت این موضوع، همین مطلب کافی است که بدانیم تولید، انتقال و توزیع انرژی الکتریکی در اکثر قریب به اتفاق سیستم‌های قدرت با امواج سینوسی صورت می‌گیرد. همچنین در بسیاری از مدارهای الکترونیکی و مخابراتی، از مولدهای با سیگنال سینوسی استفاده می‌شود. لذا به‌عنوان یک مهندس برق لازم است تا مدارهای الکتریکی را با ورودی‌های سینوسی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و پاسخ مدار را به این نوع منابع ورودی به‌دست آوریم. در فصل‌های قبلی، مدار خطی مرتبه اول و دوم را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. همچنین مثال‌هایی را بیان نمودیم که در خلال آنها، پاسخ مدارهای ساده به ورودی‌های سینوسی را به‌دست آوردیم. در این فصل می‌خواهیم روش ساده و کلی را برای تعیین پاسخ مدارهای متنوع به ورودی‌های سینوسی تعیین نماییم که این روش، با استفاده از ابزاری به‌نام فازور امکان پذیر خواهد بود.

۷-۲- ویژگی‌های توابع سینوسی

قبل از اینکه وارد بحث اصلی این فصل شویم، بهتر است که ویژگی‌ها و اصطلاحات مربوط به امواج سینوسی را مورد بررسی مجدد قرار دهیم. شکل موج یک تابع سینوسی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$f(t) = F_{\max} \cos \omega t \quad (۱-۷)$$

که شکل موج این تابع در شکل (۱-۷) نشان داده شده است. در این شکل موج، $F_{\max}$ بیانگر دامنه^۱ یا مقدار ماکزیمم موج، ω سرعت زاویه‌ای موج بر حسب rad/sec (یا deg/sec) و t متغیر زمانی شکل موج $f(t)$ می‌باشد. لازم به ذکر است که مفهوم تابع سینوسی به این معنی نیست که شکل موج موردنظر حتماً برحسب یک تابع $\sin$ می‌باشد، بلکه با توجه به آنکه هر موج سینوسی یا کسینوسی را می‌توان برحسب تابع کسینوسی (یا ایجاد یک اختلاف زاویه ۹۰ درجه) نوشت. لذا کلیه امواج برحسب $\sin$ یا $\cos$ را به عنوان توابع سینوسی در نظر می‌گیریم.



شکل (۱-۷): شکل موج سینوسی تابع $f(t) = F_{\max} \cos \omega t$

توابع سینوسی موردنظر به صورت توابع متناوب با دوره تناوب T می‌باشند. منظور از متناوب بودن تابع $f(t)$ با دوره تناوب T این است که رابطه زیر صادق باشد:

$$f(t+T) = f(t) \quad (۲-۷)$$

حال برای این شکل موج متناوب $f(t)$ ، فرکانس موج را تعریف می‌کنیم. تعداد سیکل‌هایی را که موج مربوطه در یک ثانیه طی می‌کند، فرکانس موج می‌نامیم و با متغیر f و با واحد Hz (سیکل بر ثانیه) نشان می‌دهیم. بر اساس این تعریف می‌توان نوشت:

$$f = \frac{1}{T} \quad (۳-۷)$$

از طرف دیگر، اگر معادله (۱-۷) را برحسب ωt (که مسافت طی شده توسط موج است) رسم کنیم، آنگاه هر سیکل، متناظر با زاویه الکتریکی 2π رادیان یا 360° درجه می‌باشد. از این رو سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

^۱ - Amplitude

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (۴-۷)$$

در نتیجه، معادله (۱-۷) را می‌توان به صورت‌های زیر نیز بیان نمود:

$$f(t) = F_{\max} \cos \omega t = F_{\max} \cos 2\pi f t = F_{\max} \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (۵-۷)$$

همچنین به‌جای استفاده از دامنه موج $F_{\max}$ ، می‌توان از مقدار مؤثر موج استفاده کرد. مقدار مؤثر موج $f(t)$ را با F_{rms} بیان می‌کنیم که به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_{\max} \quad (۶-۷)$$

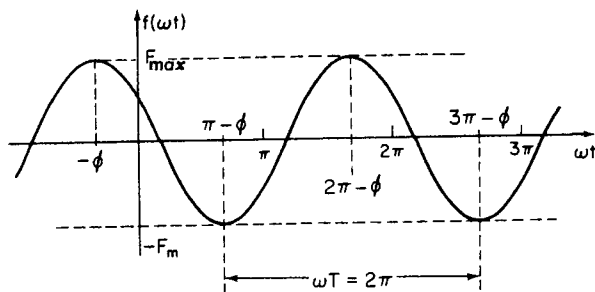
پس رابطه اخیر را می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$f(t) = \sqrt{2} F_{\text{rms}} \cos(\omega t) \quad (۷-۷)$$

حال می‌خواهیم مفاهیم پیش‌فازی و پس‌فازی یک موج را بیان نماییم. در شکل (۱-۷)، مبدا موج $f(t)$ در محور زمان، در نقطه‌ای در نظر گرفته شده است که در آن زمان (یعنی $t=0$)، موج مذکور، دارای مقدار حداکثر خود است. البته این مبدا زمانی را می‌توان در هر جای شکل موج $f(t)$ در نظر گرفت که این جابجایی در شکل موج را با زاویه فاز^۱ موج بیان می‌کنیم. شکل (۲-۷)، یک موج سینوسی با تابع

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (۸-۷)$$

را نشان می‌دهد که به ϕ زاویه فاز (یا زاویه موج) می‌گویند. این زاویه به آن معنی است که موج مذکور در $t=0$ ، دارای زاویه ϕ می‌باشد. به عبارت دیگر، زاویه ϕ مبین اختلاف فاز تابع سینوسی نسبت به مبدا زمان یا سایر توابع سینوسی است. در صورتی که زاویه ϕ ، مثبت باشد، نتیجه می‌گیریم که موج مذکور نسبت به مبدا زمان به مقدار ϕ درجه پیش (جلو) افتاده است و اگر زاویه ϕ ، منفی باشد، به این معنی است که موج $f(t)$ نسبت



شکل (۲-۷): شکل موج سینوسی با تابع $f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi)$

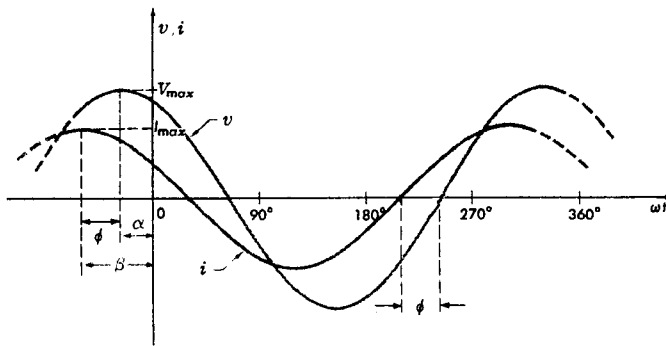
^۱ - Phase Angle

به مبدا زمان به مقدار ϕ درجه پس (عقب) افتاده است. به این مفاهیم، بترتیب پیش فازی و پس فازی موج می‌گوییم. برای درک بهتر این موضوع، بهتر است از دو موج سینوسی (به عنوان مثال یک موج جریانی و یک موج ولتاژی) به صورت زیر استفاده کنیم:

$$v(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \alpha) \quad (9-7)$$

$$i(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \beta) \quad (10-7)$$

این دو موج در شکل (۷-۳) نشان داده شده است. در صورتی که اختلاف زاویه بین این دو موج، برابر $\phi = \alpha - \beta$ باشد، آنگاه با مقادیر α و β مشخص شده در شکل، در می‌یابیم که موج ولتاژ پس از موج جریان به مقدار حداکثر خود می‌رسد. لذا می‌گوییم که موج ولتاژ، نسبت به موج جریان به مقدار ϕ درجه پس فاز^۱ می‌باشد و یا برعکس، موج جریان نسبت به موج ولتاژ به مقدار ϕ درجه پیش فاز^۲ است. مقادیر α و β را می‌توان برحسب رادیان یا درجه بیان نمود ولی معمولاً زاویه فاز را برحسب درجه بیان می‌کنند و کاربرد زاویه برحسب درجه در محاسبات بعدی این نوع مدارها مناسب‌تر خواهد بود. حال اگر در مدارهای الکتریکی موردنظر، منابع جریان و ولتاژ به شکل توابع سینوسی ارائه شده با مشخصات فوق باشد، آنگاه اصطلاحاً می‌گوییم که مدار با تحریک سینوسی است.



شکل (۷-۳): مفاهیم پس فازی و پیش فازی بین دو موج $v(t)$ و $i(t)$

مثال (۷-۱): در صورتی که دو منبع ولتاژ سینوسی با مشخصات $v_1(t) = 100 \cos(377t + 30^\circ)$ و $v_2(t) = 50 \cos(377t + 60^\circ)$ باشد آنگاه می‌توان گفت که موج ولتاژ $v_1(t)$ نسبت به موج ولتاژ $v_2(t)$ ، به مقدار 30° درجه عقب‌تر (پس فاز) است و برعکس، موج ولتاژ $v_2(t)$ به مقدار 30° درجه از ولتاژ $v_1(t)$ ، جلوتر (پیش فاز) می‌باشد.

^۱ - Lag

^۲ - Lead

تمرین (۷-۱): اگر دو جریان در یک مدار، برابر $i_1(t) = 120 \cos(100\pi t + 30^\circ)$ و $i_2(t) = 20 \sin(100\pi t - 50^\circ)$ باشد، آنگاه جریان $i_2(t)$ چقدر جلوتر (پیش فاز) از $i_1(t)$ است.

جواب: 170° - درجه جلوتر یا 170° درجه عقب تر

۷-۲- نمایش فازور در توابع سینوسی

در این بخش، می‌خواهیم روشی را ارائه دهیم که به کمک آن می‌توانیم تابع تحریک سینوسی یا پاسخ‌های سینوسی را با نمایشی از اعداد مختلط به نام نمایش فازوری نشان دهیم. این نمایش، مبین مشخصات دقیق موج سینوسی است که به صورت تابعی تحلیلی از زمان بیان گردیده است. با استفاده از فازورها خواهیم دید که به جای مشتق‌ها و انتگرال‌گیری‌های سینوسی (که در فصل‌های قبل به آنان اشاره کردیم)، مشخصات دیگری (از جمله $j\omega$ و $\sqrt{j\omega}$) جایگزین می‌گردد که تحلیل مدارها را در حالت سینوسی بسیار آسان می‌کند.

برای بیان مفهوم فازور از یک موج سینوسی $f(t)$ آغاز می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2} F_{\text{rms}} \cos(\omega t + \phi) \quad (11-7)$$

که در این رابطه، $F_{\max}$ دامنه موج، F_{rms} مقدار مؤثر، ω سرعت زاویه‌ای و ϕ زاویه فاز موج $f(t)$ می‌باشند. حال به راحتی می‌توان اثبات کرد که مجموع جبری هر تعداد از امواج سینوسی با سرعت زاویه‌ای یکسان (مثلاً ω) و با هر تعداد از مشتق‌ها و انتگرال‌گیری از آنها با هر مرتبه، خود یک موج سینوسی با همان سرعت زاویه‌ای خواهد بود. به عبارت دیگر، هر گونه عملیات جبری، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری با هر مرتبه، سرعت زاویه‌ای موج‌ها را تغییر نمی‌دهد. پس می‌خواهیم با استفاده از تبدیل فازور از این خاصیت مهم استفاده کنیم. برای این منظور می‌توان رابطه (۷-۱۱) را به صورت قسمت حقیقی یک تابع مختلط زیر در نظر گرفت:

$$f(t) = \text{Re}[F_{\max} \cos(\omega t + \phi) + jF_{\max} \sin(\omega t + \phi)] \quad (12-7)$$

که عملگر Re به معنای در نظر گرفتن قسمت حقیقی یک عدد مختلط می‌باشد. لازم به ذکر است که برای مرور بر اعداد مختلط و خواص آنان می‌توان به ضمیمه (الف) مراجعه نمود. اما براساس رابطه اولر^۱ می‌توان نوشت:

^۱ - Euler Equation

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (۱۳-۷)$$

حال اگر در رابطه (۷-۱۲) از خاصیت رابطه اولر ارائه شده در رابطه (۷-۱۳) استفاده کنیم، آنگاه آن رابطه به شکل زیر تغییر می کند:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Re} [F_{\max} e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re} [F_{\max} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [\sqrt{2} F_{rms} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \operatorname{Re} [F_{rms} e^{j\phi} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (۱۴-۷)$$

حال اگر از رابطه اخیر، مشتق، انتگرال گیری و هر عملیات دیگری انجام دهیم جمله $e^{j\omega t}$ ثابت باقی می ماند و جمله ضریب آن تغییر می کند و این یعنی اینکه سرعت زاویه ای موج، تغییر نمی کند. لذا فازور موج $f(t)$ را به صورت $\vec{F}$ نمایش داده و به مقدار زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{F} = F_{rms} e^{j\phi} = F_{rms} \angle \phi \quad (۱۵-۷)$$

یعنی شکل موج $f(t)$ در رابطه (۷-۱۴) را با بیان مفهوم فازور به شکل زیر تغییر می دهیم:

$$f(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [\vec{F} e^{j\omega t}] \quad (۱۶-۷)$$

به عبارت دیگر، به جای آنکه موج $f(t)$ را به صورت رابطه (۷-۱۴) نمایش دهیم، با فازور آن، یعنی رابطه (۷-۱۵) مشخص می کنیم. یعنی هر موج $f(t)$ را با مقدار مؤثر موج (به عنوان اندازه موج)، به همراه زاویه فاز آن (به عنوان زاویه موج) بیان می کنیم. با استفاده از دو مشخصه فازور (یعنی F_{rms} و ϕ) در کنار سرعت زاویه ای ω ، موج $f(t)$ به طور کامل مشخص می گردد.

مثال (۷-۲): در صورتی که ولتاژ یک منبع سینوسی به صورت $v(t) = 110\sqrt{2} \cos(377t + 60^\circ)$ باشد آنگاه فازور این ولتاژ $v(t)$ برابر $\vec{V} = 110 \angle 60^\circ$ خواهد بود.

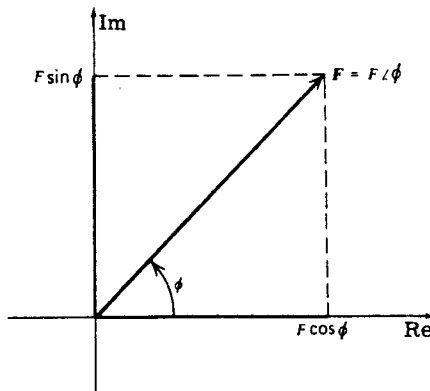
مثال (۷-۳): در صورتی که فازور جریان یک منبع سینوسی برابر $\vec{I} = 50 \angle -30^\circ$ باشد و سرعت زاویه ای موج هم $120\pi \text{ rad/sec}$ باشد آنگاه تابع زمانی منبع جریان به صورت $i(t) = 50\sqrt{2} \cos(120\pi t - 30^\circ)$ است.

فازور $\vec{F}$ برای تابع $f(t)$ ، از نظر ریاضی یک بردار دو بعدی است که با نمایش در رابطه (۷-۱۵)، F_{rms} دامنه بردار $\vec{F}$ و ϕ زاویه بردار نسبت به محور افقی است که در شکل (۷-۴) نشان داده شده است. البته زاویه فازور ϕ نمایانگر وضعیت زمانی بردار است نه

وضعیت مکانی آن (به عبارتی می‌توان گفت که شکل موج، یک شیفت زمانی به اندازه ϕ پیدا می‌کند که می‌تواند پس‌فاز یا پیش‌فاز باشد). این شکل نمایش را فرم قطبی^۱ فازور $\vec{F}$ می‌نامیم. شکل دیگر نمایش فازور به فرم دکارتی آن معروف است که براساس مولفه‌های حقیقی و موهومی فازور $\vec{F}$ به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\vec{F} = F_{rms} \angle \phi = F_{rms} \cos \phi + j F_{rms} \sin \phi \quad (۱۷-۷)$$

که $F_{rms} \cos \phi$ قسمت حقیقی نمایش دکارتی فازور $\vec{F}$ ، و $F_{rms} \sin \phi$ قسمت موهومی نمایش دکارتی فازور $\vec{F}$ است.



شکل (۷-۴): نمایش برداری فازور

حال می‌خواهیم مزایای اولیه استفاده از فازورها را نشان دهیم. برای این منظور، فرض کنید که دو تابع سینوسی $a(t)$ و $b(t)$ با سرعت زاویه‌ای یکسان ω به صورت زیر تعریف شوند:

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = \sqrt{2} B \cos(\omega t + \beta)$$

در صورتی که بخواهیم این دو موج را در حوزه زمان با هم جمع کنیم، یعنی $c(t) = a(t) + b(t)$ را محاسبه کنیم، باید از روابط مثلثاتی استفاده نماییم که نیاز به محاسبات زیادی دارد؛ اما می‌توان نشان داد که با استفاده از خاصیت فازور، این مجموع را به راحتی می‌توان انجام داد. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$c(t) = a(t) + b(t)$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} [A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha) + B \cos(\omega t + \beta) + j B \sin(\omega t + \beta)]$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[A e^{j(\omega t + \alpha)} + B e^{j(\omega t + \beta)} \right]$$

^۱- Polar Form

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\left(A e^{j\alpha} + B e^{j\beta} \right) e^{j\omega t} \right]$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[(\vec{A} + \vec{B}) e^{j\omega t} \right]$$

حال اگر $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ باشد، آنگاه:

$$c(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{C} e^{j\omega t} \right]$$

لذا اثبات شد که برای جمع دو تابع سینوسی می‌توان دو تابع سینوسی هم فرکانس را ابتدا به صورت فازور در آورد و سپس با استفاده از جبر بردارها، فازورها را با هم جمع نموده و در نهایت، فازور به دست آمده را به حوزه زمان انتقال داد. از این موضوع می‌توان در قوانین KVL و KCL استفاده نمود.

کاربرد فازور در قوانین KVL و KCL

در فصول ابتدایی، قوانین KVL و KCL را در حوزه زمان بیان نمودیم. در مورد قانون KCL بیان نمودیم که مجموع جبری جریان‌های ورودی به هر گره و در هر لحظه از زمان، برابر صفر است. یعنی،

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = 0 \quad (18-7)$$

که n به معنای تعداد شاخه‌های متصل به گره موردنظر است. حال اگر تمام جریان‌های $i_1(t)$ تا $i_n(t)$ به صورت جریان‌های سینوسی باشند، آنگاه براساس اثباتی که در قسمت قبل صورت گرفت، رابطه (18-7) را می‌توان به صورت جمع جبری فازوری هر یک از جریان‌ها نوشت که،

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_n = 0 \quad (19-7)$$

سادگی محاسبات در رابطه (19-7) بسیار بیشتر از محاسبات رابطه (18-7) است. همچنین در بیان قانون KVL گفتیم که در هر حلقه، جمع جبری ولتاژهای هر شاخه موجود در آن حلقه و در هر لحظه از زمان، برابر صفر است. به عبارت دیگر،

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_m(t) = 0 \quad (20-7)$$

که m به معنای تعداد شاخه‌های موجود در حلقه موردنظر است. اکنون اگر تمام ولتاژهای $v_1(t)$ تا $v_m(t)$ به شکل توابع سینوسی باشند، آنگاه رابطه (20-7) را می‌توان برحسب فازورهای هر یک از ولتاژها به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_m = 0 \quad (21-7)$$

با توجه به آنکه در روابط (19-7) و (21-7) با جمع برداری فازورها سروکار داریم، لذا محاسبات برداری، بسیار ساده‌تر از محاسبات توابع سینوسی در حوزه زمان است.

مثال (۷-۴): یک گره در مدار الکتریکی، از اتصال سه شاخه تشکیل شده است. با فرض آنکه مدار مذکور در حالت تحریک سینوسی باشد، تمام متغیرهای مدار به صورت تابع سینوسی است. حال اگر جریان‌های دو شاخه ورودی به گره برابر $i_1(t) = 5 \cos(\omega t + 36/87^\circ)$ و $i_2(t) = 3\sqrt{2} \cos(\omega t - 135^\circ)$ باشد آنگاه جریان خروجی از گره را در شاخه سوم تعیین کنید.

حل: با توجه به قانون KCL برای این گره می‌توان نوشت:

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5 \cos(\omega t + 36/87^\circ) + 3\sqrt{2} \cos(\omega t - 135^\circ)$$

حال جمع دو تابع سینوسی فوق روال مشکلی دارد. اما اگر از طریق فازوری حل کنیم، خواهیم داشت:

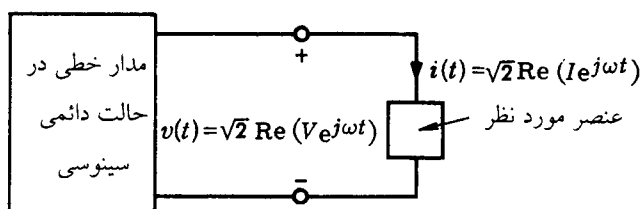
$$\vec{I}_3 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 36/87^\circ + 3 \angle -135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 0$$

حال جریان $i_3(t)$ را می‌توان با استفاده از فازور $\vec{I}_3$ به صورت زیر تشکیل داد:

$$i_3(t) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t + 0) = \cos \omega t$$

۷-۳- روابط فازوری اجزاء مدار (R و L و C)

در فصل‌های ابتدایی، روابط بین ولتاژ و جریان عناصر مقاومت، سلف، و خازن را بیان نمودیم. برای عنصر مقاومت، ارتباط بین ولتاژ و جریان به صورت خطی بود، ولی برای عناصر سلف و خازن، با روابط مشتقی و انتگرالی سروکار داشتیم. این ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان، در حالت تحریک مدار با منبع سینوسی در شکل (۷-۵) نشان داده شده است. در این مدار، فرض کنید که ولتاژ و جریان عنصر مورد بررسی به صورت کلی زیر باشند:



شکل (۷-۵): عنصر مورد بررسی در یک مدار با تحریک سینوسی

$$v(t) = \sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{V} e^{j\omega t} \right] \quad (22-7)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{rms} \cos(\omega t + \beta) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{I} e^{j\omega t} \right] \quad (23-7)$$

که در این روابط، $\vec{I} = I_{rms} \angle \beta$ و $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ می‌باشد. حال می‌خواهیم روابط بین فازور $\vec{V}$ و فازور $\vec{I}$ را برای عناصر مختلف مقاومت، سلف و خازن بیان نماییم.

۷-۳-۱- روابط فازوری عنصر مقاومت

در صورتی که عنصر مورد بررسی، یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، آنگاه ارتباط بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان برای این مقاومت به صورت زیر خواهد بود:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (24-7)$$

حال اگر جریان سینوسی ارائه شده در رابطه (۲۳-۷) را در معادله (۲۴-۷) جایگزینی کنیم خواهیم داشت:

$$v(t) = R \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{I} e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[R \vec{I} e^{j\omega t} \right] \quad (25-7)$$

لازم به ذکر است که اگر یک مقدار ثابت R در یک عدد مختلط ضرب شود، آن مقدار، هم در قسمت حقیقی و هم در قسمت موهومی آن عدد ضرب می‌شود. پس ضریب R را می‌توان در داخل کروشه وارد نمود. حال با مقایسه رابطه (۲۵-۷) با معادله (۲۳-۷) در می‌یابیم که برای معادل بودن، باید رابطه زیر برقرار باشد:

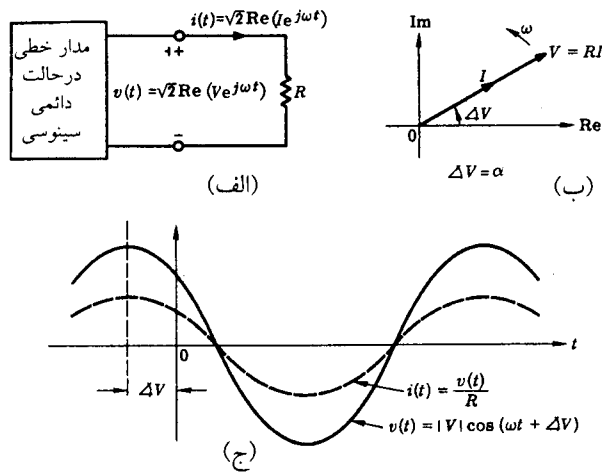
$$\vec{V} = R \vec{I} \quad , \quad \vec{I} = \frac{1}{R} \vec{V} \quad (26-7)$$

به عبارت دیگر،

$$V_{rms} = R I_{rms} \quad (27-7)$$

$$\angle \beta = \angle \alpha \quad (28-7)$$

این موارد را می‌توان در شکل (۷-۶) مشاهده نمود. با توجه به تساوی زوایای فازور ولتاژ و جریان، در می‌یابیم که فازورهای ولتاژ و جریان در یک راستا بوده و فقط اندازه آنان با هم متفاوت می‌باشد که ارتباط اندازه بردارها با رابطه (۲۷-۷) مشخص می‌شود. پس در نهایت می‌توان گفت که رابطه ولتاژ و جریان یک مقاومت در شکل فازوری آن، مشابه رابطه میان ولتاژ و جریان در حوزه زمان است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که شکل موج ولتاژ و جریان، هم‌فاز هستند و دامنه ولتاژ و جریان، متناسب با مقدار مقاومت می‌باشد.



شکل (۷-۶): روابط ولتاژ و جریان برای مقاومت در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

مثال (۷-۵): در صورتی که ولتاژ دو سر یک مقاومت 4Ω برابر $8\cos(100t - 50^\circ)$ باشد آنگاه جریان عبوری از مقاومت را بیابید.

حل: برای محاسبه جریان در حوزه زمان داریم:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{8\cos(100t - 50^\circ)}{4} = 2\cos(100t - 50^\circ)$$

حال اگر بخواهیم از روش فازوری حل کنیم، با توجه به آنکه فازور ولتاژ برابر

$$\vec{V} = \frac{8}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ$$

$$\vec{I} = \frac{1}{R} \vec{V} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ$$

در نتیجه، $i(t)$ را می‌توان با استفاده از فازور آن به صورت زیر نوشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(100t - 50^\circ) = 2\cos(100t - 50^\circ)$$

۷-۳-۲- روابط فازوری عنصر سلف

رابطه بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان برای یک سلف به صورت زیر است:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (29-7)$$

حال رابطه (۲۳-۷) را در رابطه اخیر جایگزین می‌کنیم:

$$v(t) = L \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{2} \operatorname{Re} [\bar{I} e^{j\omega t}] \right\} \quad (30-7)$$

با توجه به خطی بودن عملگرهای d/dt و Re می‌توان این دو عملگر را با هم جابجا نمود. لذا با مشتق‌گیری از جمله داخل کروشه می‌توان نوشت:

$$v(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[L \bar{I} \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) \right]$$

$$v(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} [j\omega L \bar{I} e^{j\omega t}] \quad (31-7)$$

حال با مقایسه رابطه (۳۱-۷) و رابطه (۲۲-۷) به این نتیجه می‌رسیم که،

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} \quad , \quad \vec{I} = \frac{1}{j\omega L} \vec{V} \quad (32-7)$$

این رابطه اخیر را می‌توان به صورت اندازه و زاویه هم نشان داد. یعنی،

$$V_{rms} = (\omega L) I_{rms} \quad (33-7)$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I} \quad (34-7)$$

لذا نتیجه می‌گیریم که اندازه فازور ولتاژ دو سر سلف، به مقدار ωL برابر اندازه فازور جریان سلف است ولی زاویه فازور ولتاژ، 90° درجه بیشتر از زاویه فازور جریان است (یا شکل موج جریان سلف، 90° درجه نسبت به شکل موج ولتاژ آن، پس‌فاز است). به عبارت دیگر، شکل موج جریان به میزان $\frac{1}{4}$ سیکل از شکل موج ولتاژ دو سر آن عقب‌تر است. این موارد را می‌توان در شکل (۷-۷) مشاهده نمود.

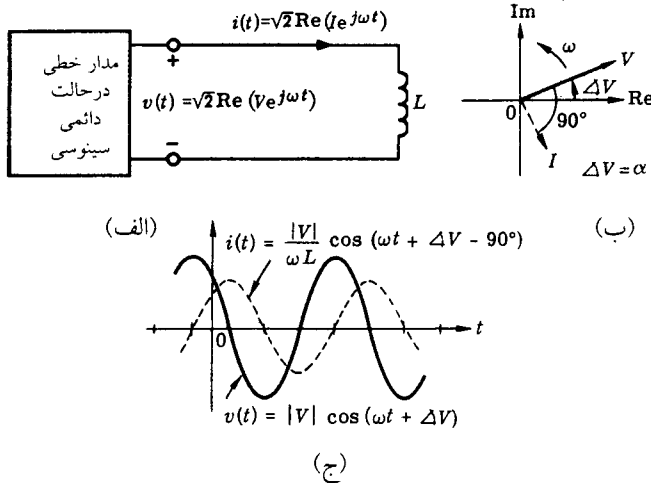
مثال (۷-۶): در صورتی که فازور ولتاژ دو سر یک سلف، برابر $V = 8\angle -50^\circ$ باشد و به یک سلف $2H$ اعمال گردد، و فرکانس زاویه‌ای هم $\omega = 100 \text{ rad/sec}$ باشد، موج جریان عبوری از سلف را بیابید.

حل: فازور جریان عبوری از سلف را می‌توان از رابطه (۳۲-۷) به‌دست آورد:

$$\vec{I} = \frac{1}{j\omega L} \vec{V} = \frac{1}{j100 \times 4} 8\angle -50^\circ = 0.02\angle -140^\circ$$

حال اگر بخواهیم جریان سلف را در حوزه زمان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 0.02 \cos(100t - 140^\circ)$$



شکل (۷-۷): روابط ولتاژ و جریان برای سلف در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

۷-۳-۳- روابط فازوری عنصر خازن

رابطه بین ولتاژ و جریان یک عنصر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (۷-۳۵)$$

با استفاده از نمایش فازوری i و v با توجه به روابط (۷-۲۲) و (۷-۲۳) در نهایت نتیجه می گیریم که،

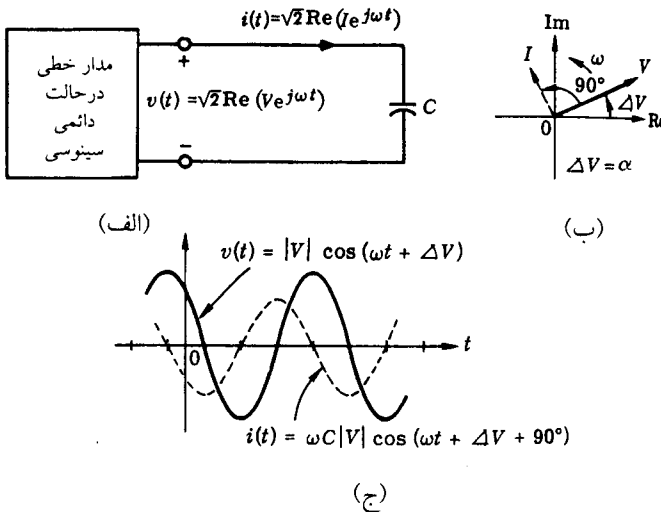
$$\vec{I} = j\omega C \vec{V}, \quad \vec{V} = \frac{1}{j\omega C} \vec{I} \quad (۷-۳۶)$$

یعنی،

$$I_{rms} = \omega C \cdot V_{rms} \quad (۷-۳۷)$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I} \quad (۷-۳۸)$$

این روابط نشان می دهد که زاویه فازور جریان، 90° درجه از زاویه فازور ولتاژ، جلوتر است؛ به عبارت دیگر، شکل موج جریان سینوسی 90° جلوتر (پیش فازی) از شکل موج ولتاژ سینوسی دو سر خازن است. به عبارت دیگر، شکل موج جریان خازن، 90° درجه نسبت به شکل موج ولتاژ آن، پیش فاز است؛ که زاویه 90° درجه به معنای $\frac{\pi}{4}$ سیکل می باشد. این مشخصات و خصوصیات را می توان در شکل (۷-۸) مشاهده نمود.



شکل (۷-۸): روابط ولتاژ و جریان برای خازن در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

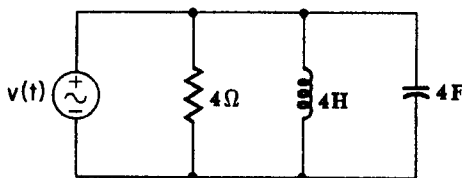
مثال (۷-۷): در صورتی که فازور ولتاژ $V \angle -50^\circ$ به دو سر یک خازن با ظرفیت $4F$ اعمال گردد، آنگاه جریان عبوری از خازن را در سرعت زاویه‌ای $\omega = 100 \text{ rad/sec}$ بیابید. حل: از رابطه (۷-۳۶) خواهیم داشت

$$\vec{I} = j\omega C \vec{V} = j100 \times 4 \times 8 \angle -50^\circ = 3200 \angle 40^\circ$$

لازم به ذکر است که $1 \angle 90^\circ = j$ است. در نتیجه، جریان خازن در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 3200 \cos(\omega t + 40^\circ)$$

تمرین (۷-۲): مدار موازی ارائه شده در شکل (۷-۹)، اگر منبع ولتاژ سینوسی به صورت $\sqrt{2} \times 8 \cos(100t - 50^\circ)$ باشد، آنگاه جریان‌های عبوری از مقاومت، سلف و خازن را بیابید.



شکل (۷-۹): مدار موازی مربوط به تمرین (۷-۲)

$$i_R(t) = \sqrt{2} \times 20 \cos(100t - 50^\circ)$$

$$i_L(t) = \sqrt{2} \times 0.02 \cos(100t - 140^\circ) \quad \text{جواب:}$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} \times 3200 \cos(100t + 40^\circ)$$

۷-۴- تعریف مفاهیم امپدانس و ادمیتانس

۷-۴-۱- تعریف امپدانس

برای تعریف مفاهیم امپدانس یک مدار الکتریکی، یک شبکه یک قطبی را با عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان مطابق شکل (۷-۱۰-الف) در نظر بگیرید. فرض کنید که منبع جریان سینوسی به صورت زیر به شبکه متصل شده باشد:

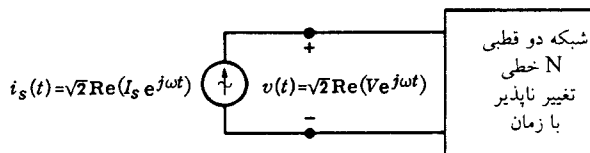
$$i_s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{I}_s e^{j\omega t}] = \sqrt{2} I_s \cos(\omega t + \beta) \quad (7-39)$$

حال با توجه به آنکه پاسخ ولتاژ با تحریک سینوسی به شکل زیر باشد،

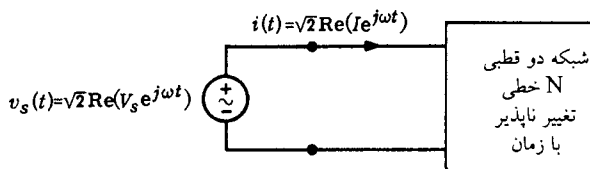
$$v(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{V} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha) \quad (7-40)$$

آنگاه امپدانس نقطه تحریک شبکه N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{Z}(j\omega) \triangleq \frac{\vec{V}}{\vec{I}_s} \quad (7-41)$$



(الف)



(ب)

شکل (۷-۱۰): شبکه دو قطبی متصل به: (الف) یک منبع جریان سینوسی؛ (ب) یک منبع ولتاژ سینوسی

یعنی فازور امپدانس به معنای نسبت فازور ولتاژ دو سر مدار ($\vec{V}$) به فازور جریان منبع ورودی ($\vec{I}_s$) است و ω هم سرعت زاویه‌ای منبع جریان ورودی است. به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که نسبت فازور ولتاژ هر دو نقطه از یک مدار به جریان ورودی آن دو سر، برابر با امپدانس دیده شده از آن دو سر می‌باشد. لذا از رابطه (۷-۴۱) در می‌یابیم که،

$$|\vec{Z}(j\omega)| = \frac{V_{rms}}{I_s}, \quad \angle \vec{Z}(j\omega) = \alpha - \beta \quad (۷-۴۲)$$

اکنون با توجه به تعریف فازور امپدانس، ولتاژ ارائه شده در رابطه (۷-۴۰) را می‌توان با استفاده از رابطه (۷-۴۱) به صورت زیر تغییر داد:

$$\vec{V} = \vec{Z}(j\omega) \vec{I}_s$$

$$v(t) = \sqrt{2} |\vec{Z}(j\omega)| I_s \cos(\omega t + \angle \vec{Z}(j\omega) + \angle \beta) \quad (۷-۴۳)$$

پس براساس تعریف (۷-۴۱)، امپدانس مقاومت، سلف و خازن، با توجه به روابط (۷-۲۶)، (۷-۳۲) و (۷-۳۶) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{Z}_R(j\omega) = \frac{\vec{V}_R}{\vec{I}_s} = R \quad (۷-۴۴)$$

$$\vec{Z}_L(j\omega) = \frac{\vec{V}_L}{\vec{I}_s} = j\omega L \quad (۷-۴۵)$$

$$\vec{Z}_C(j\omega) = \frac{\vec{V}_C}{\vec{I}_s} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (۷-۴۶)$$

این امپدانس‌ها، کمیت‌های مختلطی هستند که بعد آن هم، برحسب اهم می‌باشد. البته لازم به ذکر است که کاربرد اصطلاح فازور برای امپدانس، فقط به معنای بردار امپدانس است و به این معنی نیست که فازور $\vec{Z}(j\omega)$ را می‌توان در حوزه زمان هم نوشت. به عبارت دیگر، معنای فازور امپدانس، فقط بیانگر شکل برداری امپدانس است.

حال با توجه به آنکه ω در یک مدار سینوسی، مقدار ثابتی است، لذا مقدار ωL در یک سلف را به عنوان راکتانس القایی^۱ بیان نموده و با X_L نشان می‌دهیم. همچنین برای یک خازن، مقدار $1/\omega C$ را به عنوان راکتانس خازنی نام نهاده و با X_C نمایش می‌دهیم. لذا روابط (۷-۴۵) و (۷-۴۶) به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$\vec{Z}_L = j\omega L = jX_L = \vec{X}_L \quad (۷-۴۷)$$

$$\vec{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = \vec{X}_C \quad (۷-۴۸)$$

^۱ - Reactance

همچنین قوانین مربوط به مدارهای سری و موازی برای این امپدانس‌ها نیز همانند قوانین برای مقاومت‌ها در مدارهای با منابع ثابت می‌باشند. تنها تفاوتی که وجود دارد آن است که در محاسبات با امپدانس‌های سلفی و خازنی، باید از اعداد مختلط استفاده شود که دانشجویان می‌بایست با مطالب مربوط به آن، که در ضمیمه (الف) هم ارائه شده است، آشنا باشند. بدین منظور اگر مداری از سری شدن عناصر مقاومتی، سلفی یا خازنی تشکیل شده باشد، آنگاه امپدانس $\bar{Z}$ به صورت یک عدد مختلط خواهد بود که دارای قسمت‌های حقیقی^۱ و موهومی^۲ است. قسمت حقیقی آن متناظر با کل مقاومت اهمی در مدار (R) بوده و قسمت موهومی آن هم بیانگر میزان راکتانس (القایی یا خازنی) موجود در مدار است. یعنی،

$$\bar{Z} = R + jX \quad (۴۹-۷)$$

که

$$R = \text{Re}[\bar{Z}] \quad , \quad X = \text{Im}[\bar{Z}]$$

۷-۴-۲- تعریف ادmittانس

اکنون به تعریف ادmittانس نقطه تحریک در یک شبکه تک قطبی می‌پردازیم. بدین منظور، مطابق شکل (۷-۱۰-ب) یک منبع ولتاژ سینوسی مطابق رابطه (۷-۴۰) به دو سر شبکه اعمال می‌کنیم. سپس با پاسخ جریانی به تحریک ولتاژ سینوسی، ادmittانس نقطه تحریک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{Y}(j\omega) \triangleq \frac{\bar{I}}{\bar{V}_s} \quad (۵۰-۷)$$

یعنی ادmittانس به معنای نسبت فازور جریان خروجی ($\bar{I}$) به فازور ولتاژ منبع ورودی ($\bar{V}_s$) می‌باشد و ω هم سرعت زاویه‌ای منبع ولتاژ ورودی است. به عبارت دیگر، نسبت فازور جریان ورودی هر نقطه از یک مدار به ولتاژ دو سر آن را ادmittانس دو سر مدار از دید دو سر موردنظر تعریف می‌کنیم. لذا از رابطه اخیر در می‌یابیم که،

$$|\bar{Y}(j\omega)| = \frac{I_{rms}}{V_s} \quad , \quad \angle \bar{Y}(j\omega) = \beta - \alpha \quad (۵۱-۷)$$

که β زاویه فازور جریان و α زاویه فازور ولتاژ است. از طرف دیگر با مقایسه شکل‌های (۷-۱۰-الف) و (۷-۱۰-ب) در می‌یابیم که اگر فازور ولتاژ $\bar{V}_s$ در شکل (ب) با فازور

^۱ - Real Part

^۲ - Imaginary Part

ولتاژ $\vec{V}$ در شکل (الف) مساوی باشد، آنگاه می‌توان گفت که فازور جریان $\vec{I}_s$ در شکل (الف) با فازور جریان $\vec{I}$ در شکل (ب) یکسان است. در نتیجه، روابط (۴۱-۷) و (۴۷-۷) به شکل زیر اصلاح می‌شوند:

$$\bar{Z}(j\omega) = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \quad (52-7)$$

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{\vec{I}}{\vec{V}} \quad (53-7)$$

از مقایسه این دو رابطه اخیر در می‌یابیم که،

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{1}{\bar{Z}(j\omega)} \quad , \quad \bar{Z}(j\omega) = \frac{1}{\bar{Y}(j\omega)} \quad (54-7)$$

و بالطبع،

$$|\bar{Z}(j\omega)| = \frac{1}{|\bar{Y}(j\omega)|} \quad , \quad \angle \bar{Z}(j\omega) = -\angle \bar{Y}(j\omega)$$

در نهایت، برای عناصر مقاومت، سلف، و خازن، ادمیتانس هر یک را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\bar{Y}_R(j\omega) = \frac{1}{R} = G \quad (55-7)$$

$$\bar{Y}_L(j\omega) = \frac{1}{\bar{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jY_L \quad (56-7)$$

$$\bar{Y}_C(j\omega) = j\omega C = jY_C \quad (57-7)$$

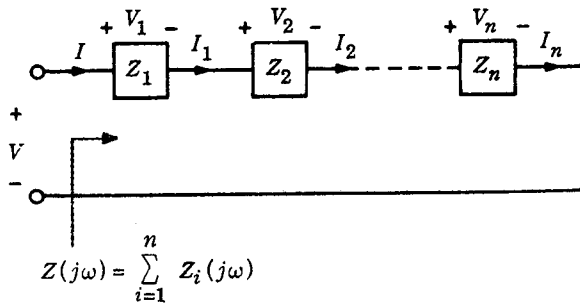
که سه رابطه اخیر، دقیقاً عکس روابط (۴۴-۷) تا (۴۶-۷) می‌باشد. در این روابط، G معرف کندوکتانس، و Y_L سوسپتانس سلفی و Y_C سوسپتانس خازنی می‌باشد.

۷-۴-۳- سری و موازی امپدانس‌ها و ادمیتانس‌ها

حال اگر در یک مداری مطابق شکل (۷-۱۱) امپدانس‌هایی با هم سری گردند، می‌خواهیم ببینیم امپدانس معادل، چه مقدار خواهد بود. شرط موردنظر در این مدار آن است که مدار در حالت دائمی سینوسی و در فرکانس داده شده ω باشد. به عبارت دیگر، متغیرهای ولتاژ و ولتاژ خازن‌ها و جریان‌های سلف‌ها دارای مقادیر اولیه نباشند و منابع مدار هم به شکل سینوسی با یک سرعت زاویه‌ای یکسان ω باشند. حال با استفاده از قوانین KCL و KVL می‌توان نوشت:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = \dots = \vec{I}_n \quad (58-7)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n = 0 \quad (59-7)$$



شکل (۷-۱۱): امپدانس‌های سری در یک مدار حالت دائمی سینوسی

و با توجه به آنکه $\vec{V}_i = \vec{Z}_i \cdot \vec{I}_i$ می‌باشد لذا با جایگزینی در رابطه (۷-۵۹) و استفاده از رابطه (۷-۵۸) به این نتیجه می‌رسیم که،

$$Z(j\omega) = Z_1(j\omega) + \dots + Z_n(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega) \quad (۷-۶۰)$$

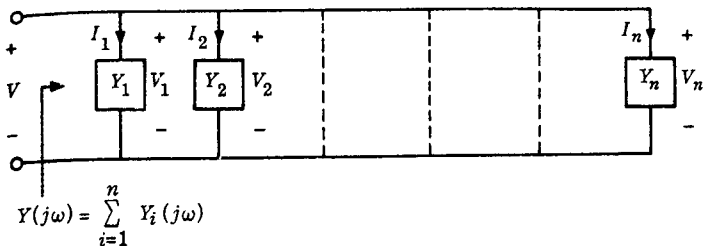
اکنون فرض کنید که عناصری با ادمیتانس‌های $\vec{Y}_1(j\omega)$ تا $\vec{Y}_n(j\omega)$ به‌طور موازی با یکدیگر قرار گرفته باشند که در شکل (۷-۱۲) مشخص شده است. حال با کاربرد قوانین KVL و KCL می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \dots = \vec{V}_n \quad (۷-۶۱)$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_n \quad (۷-۶۲)$$

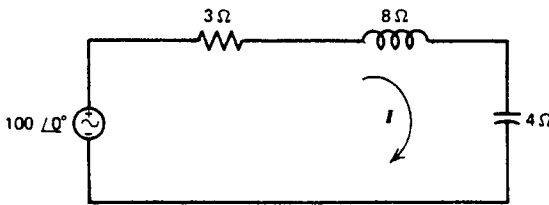
با در نظر گرفتن اینکه $\vec{I}_i = \vec{Y}_i \cdot \vec{V}_i$ می‌باشد، لذا با جایگزینی در رابطه (۷-۶۲) و استفاده از رابطه (۷-۶۱) خواهیم داشت:

$$Y(j\omega) = Y_1(j\omega) + \dots + Y_n(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega) \quad (۷-۶۳)$$



شکل (۷-۱۲): ادمیتانس‌های موازی در یک مدار حالت دائمی سینوسی

مثال (۷-۸): یک منبع ولتاژ سینوسی با مقدار مؤثر 100V مطابق شکل (۷-۱۳) با یک مقاومت 3Ω ، یک سلف با راکتانس القایی 8Ω و یک خازن با راکتانس خازنی 4Ω سری شده است. در این مدار با فرض $\omega = 314\text{ rad/sec}$ ، جریان مدار را در حالت دائمی سینوسی بیابید. همچنین ولتاژ دو سر هر عنصر را به دست آورید.



شکل (۷-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۸)

حل: با توجه به شکل (۷-۱۳)، امپدانس سه عنصر شبکه برابر است با:

$$\bar{Z}_R = R = 3\Omega$$

$$\bar{Z}_L = jX_L = j8\Omega$$

$$\bar{Z}_C = -jX_C = -j4\Omega$$

حال با توجه به سری بودن این عناصر می توان نوشت:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = 3 + j8 - j4 = 3 + j4$$

با توجه به آنکه مقدار مؤثر منبع ولتاژ سینوسی برابر 100V می باشد، لذا فازور منبع ولتاژ را برابر $100\angle 0$ در نظر می گیریم. انتخاب زاویه صفر برای فازور منبع ولتاژ به این معنی است که زاویه فازور ولتاژ منبع را به عنوان نقطه مبنا (یا مرجع فازور) در نظر گرفته ایم. اکنون فازور جریان مدار را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100\angle 0}{3 + j4} = \frac{100\angle 0}{5\angle -53.1^\circ} = 20\angle -53.1^\circ \text{ A}$$

پس جریان مدار در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 20 \cos(314t - 53.1^\circ)$$

در مرحله دوم، فازور ولتاژ را در دو سر هر عنصر می یابیم.

$$\bar{V}_R = R\bar{I} = 3 \times 20\angle -53.1^\circ = 60\angle -53.1^\circ$$

$$\bar{V}_L = jX_L\bar{I} = j8(20\angle -53.1^\circ) = 160\angle 36.9^\circ$$

$$\bar{V}_C = -jX_C\bar{I} = -j4(20\angle -53.1^\circ) = 80\angle -143.1^\circ$$

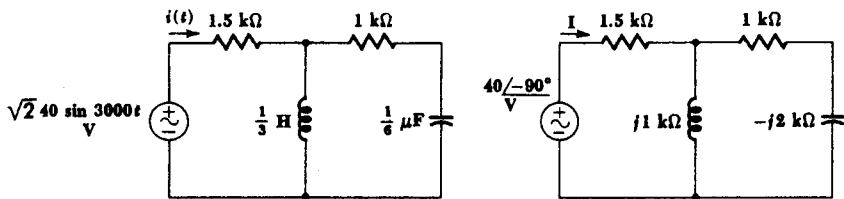
در نتیجه، این ولتاژها در حوزه زمان برابرند با:

$$v_R(t) = \sqrt{2} \times 60 \cos(314t - 53.1^\circ)$$

$$v_L(t) = \sqrt{2} \times 160 \cos(314t + 36/9)$$

$$v_C(t) = \sqrt{2} \times 80 \cos(314t - 143/1)$$

مثال (۹-۷): یک مدار RLC در حوزه زمان در شکل (۷-۱۴ الف) نشان داده شده است. با استفاده از یافتن امپدانس معادل دو سر منبع، جریان $i(t)$ را بیابید.



(الف)

(ب)

شکل (۷-۱۴): یک مدار RLC: (الف) در حوزه زمان؛ (ب) در سیستم فازور با

$$\omega = 3000 \text{ rad/sec}$$

حل: با توجه به آنکه $\omega = 3000 \text{ rad/sec}$ است، پس مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۱۴ الف) را می‌توان به سیستم فازور مطابق با شکل (۷-۱۴ ب) انتقال داد. در این حالت، امپدانس عنصر سلف مدار، برابر $j\omega L = j1000 \Omega$ و امپدانس عنصر خازن برابر $-j\frac{6 \times 10^6}{3000} = -j2000 \Omega$ می‌باشد. حال امپدانس معادل را از دو سر منبع ولتاژ محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{Z}_{eq} = 1/5 + \frac{j1(1-j2)}{j1+1-j2} = 2 + j1/5 = 2/5 \angle 36/9^\circ \text{ k}\Omega$$

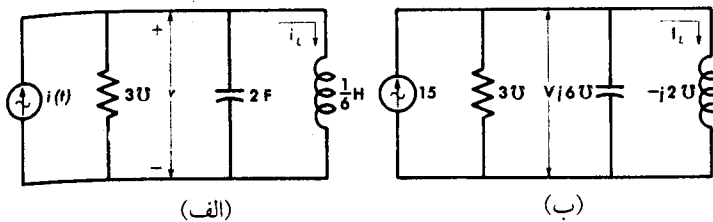
در نتیجه، فازور جریان منبع برابر است با:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_s}{\vec{Z}_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2/5 \angle 36/9^\circ} = 16 \angle -126/9^\circ \text{ mA}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 16 \cos(3000t - 126/9) \text{ mA}$$

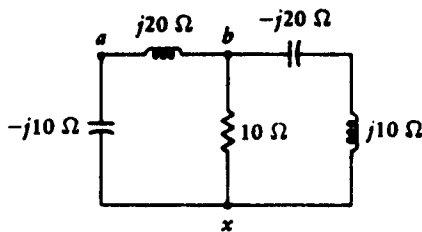
تمرین (۳-۷): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۱۵)، یک مدار RLC موازی را نشان می‌دهد که به یک منبع جریان با مقدار $i(t) = \sqrt{2} \times 15 \cos 3t$ متصل شده است. در این مدار الکتریکی، مطلوبست: (الف) ادیتانس دیده شده از دو سر منبع جریان؛ (ب) فازور ولتاژ دو سر همه عناصر؛ (ج) فازور جریان‌های هر یک از عناصر مقاومت، سلف و خازن.



شکل (۷-۱۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۱۳): (الف) در حوزه زمان؛ (ب) در سیستم فازور

جواب: (الف) $Y = 3 + j4 \frac{1}{\Omega}$ ؛ (ب) $\vec{V} = 3 \angle -53/13$ ؛ (ج) $\vec{I}_R = 9 \angle -53/13$ ،
 $\vec{I}_L = 6 \angle -143/13$ ، $\vec{I}_C = 18 \angle 36/87$

تمرین (۷-۴): امپدانس ورودی را که از سرهای $a-x$ و $b-x$ در مدار شکل (۷-۱۶) می‌توان دید، محاسبه کنید.



شکل (۷-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۴)

جواب: $\vec{Z}_{b-x} = 10 + j0$ ، $\vec{Z}_{a-x} = 10 - j20$

۷-۵- تجزیه و تحلیل گره و حلقه در حالت دائمی سینوسی

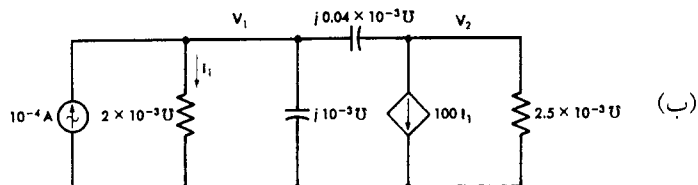
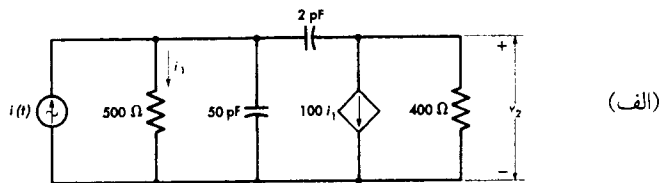
در فصول اولیه، روش‌های تحلیل گره، حلقه، جمع‌آثار، و مدار معادل تونن را برای مدارهای مقاومتی بیان نمودیم. حال می‌خواهیم همین روش‌ها را برای مدارهای در حالت دائمی سینوسی بیان نماییم. دوباره فرض می‌کنیم که پاسخ مدار، فقط برای حالت صفر انجام می‌شود، بعلاوه آنکه منابع ورودی هم باید به صورت توابع سینوسی با سرعت‌های زاویه‌ای یکسان باشند. همچنین منظور از حالت دائمی سینوسی آن است که مدت زمان زیادی باید از زمان وصل مدار بگذرد تا شرایط اولیه در مدار (ناشی از ولتاژهای اولیه خازن‌ها و جریان‌های اولیه سلف‌ها) از بین رفته و میرا گردند تا در نهایت، فقط اثر منابع سینوسی متناوب را در مدار داشته باشیم.

۷-۵-۱- تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی

در ابتدا به طور مختصر به روش تحلیل گره در مدارهای مقاومتی می پردازیم. دیدیم که اگر یک مدار مقاومتی دارای N گره باشد، آنگاه یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب نموده و معادلات KCL را برای $N-1$ گره دیگر می نویسیم. سپس با حل این $N-1$ معادله (بدون وجود منابع وابسته) ولتاژ گره ها محاسبه می شوند. حال اگر منابع وابسته هم در مدار باشند، معادلات این منابع هم به جمع $N-1$ معادله گره ها اضافه می شوند.

حال آیا روند مذکور برای مدارهای با منابع سینوسی و با استفاده از متغیرهای فازوری صادق خواهد بود؟ در دو بخش قبلی اثبات کردیم که قوانین KVL و KCL در حوزه فازور و با متغیرهای فازوری هم صادق هستند. همچنین رابطه $v(t) = R.i(t)$ در مدارهای مقاومتی به شکل $\vec{V} = \vec{Z}.\vec{I}$ در می آید که از نظر مفهومی مشابه هم می باشند. به همین دلیل می توانیم با استفاده از روش های حل گره، مدارهای با منابع سینوسی را به صورت حالت دائمی سینوسی تحلیل نماییم. این موضوع را می توان به روش های تحلیل مش، جمع آثار و مدار معادل تونن و دیگر روش ها نیز گسترش داد.

مثال (۷-۱۰): مدار الکتریکی در شکل (۷-۱۷-الف)، یک مدار تقویت کننده الکترونیکی است که در حوزه زمان رسم شده است. در صورتی که جریان منبع ورودی به صورت $i(t) = \sqrt{2} \times 10^{-4} \cos(2 \times 10^4 t)$ باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را بیابید.



شکل (۷-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۱۰): (الف) حوزه زمان؛ (ب) حوزه

فرکانس

حل: با توجه به آنکه سرعت زاویه‌ای منبع جریان ورودی، برابر $\omega = 2 \times 10^4 \text{ rad/sec}$ است، لذا مدار ارائه شده در شکل (۷-۱۷-الف) را به حوزه فرکانس برده و عناصر را برحسب ادمیتانس‌های آنها بیان می‌کنیم که در شکل (۷-۱۷-ب) نشان داده شده است. حال فازور ولتاژ دو گره ۱ و ۲ را برابر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ در نظر می‌گیریم. سپس معادلات KCL را برای این دو گره به صورت زیر می‌نویسیم. همچنین چون یک منبع وابسته نیز وجود دارد، معادله این منبع نیز به دو معادله KCL اضافه می‌شود.

$$\begin{cases} 2 \times 10^{-3} \vec{V}_1 + j \times 10^{-3} \vec{V}_1 + j \cdot 0.4 \times 10^{-3} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) - 10^{-4} = 0 \\ 100 \vec{I}_1 + 2/5 \times 10^{-3} \vec{V}_2 + j \cdot 0.4 \times 10^{-3} (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = 0 \\ \vec{I}_1 = 2 \times 10^{-3} \vec{V}_1 \end{cases}$$

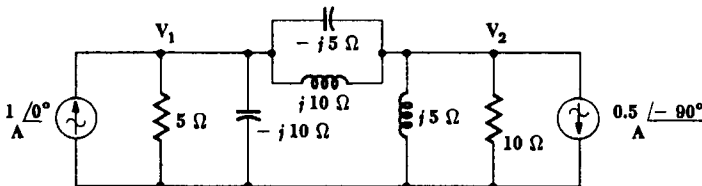
اکنون از سه معادله اخیر، متغیرهای $\vec{I}_1$ و $\vec{V}_1$ را حذف می‌کنیم که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{V}_2 = 1/7 \angle -245^\circ \text{ V}$$

که تابع زمانی متناظر با آن برابر است با:

$$v_2(t) = \sqrt{2} \times 1/7 \cos(2 \times 10^4 t - 245^\circ)$$

تمرین (۷-۵): برای مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۷-۱۸) و با استفاده از تحلیل گره، ولتاژهای دو گره را بیابید.



شکل (۷-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۵)

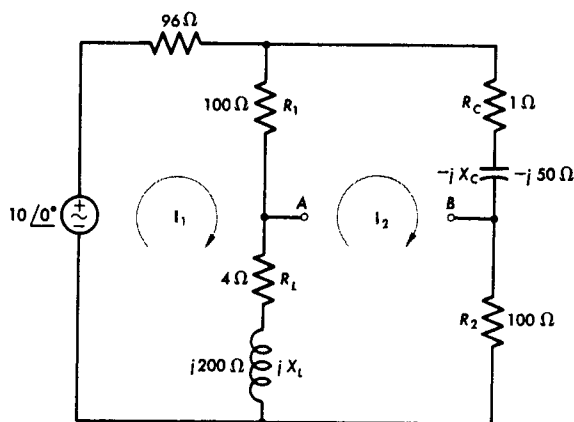
جواب: $v_2(t) = \sqrt{2} \times 4/47 \cos(\omega t + 116/6)$, $v_1(t) = \sqrt{2} \times 2/24 \cos(\omega t - 63/4)$

۷-۵-۲- تحلیل حلقه در حالت دائمی سینوسی

تحلیل حلقه در مدارهای مقاومتی بر این پایه استوار بود که پس از تعیین حلقه‌های اساسی مدار، جریان‌هایی برای آن حلقه انتخاب می‌نمودیم. سپس براساس قانون KVL، معادلات مربوطه را برای این حلقه‌ها می‌نوشتیم. با حل معادلات حلقه قادر بودیم تا

جریان‌های هر حلقه را تعیین نمایم که با استفاده از این جریان‌های حلقه، دیگر مشخصات الکتریکی مدار نیز قابل محاسبه بود. حال همین روال را می‌توانیم برای مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی انجام دهیم. بدین منظور، ابتدا اندوکتانس‌ها و کاپاسیتانس‌های مدار را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم؛ به عبارت دیگر به جای L ، راکتانس القایی $j\omega L$ و به جای C ، راکتانس خازنی $-j\omega C$ قرار می‌دهیم. همچنین منابع سینوسی را برحسب فازورهای آنان بیان می‌کنیم. در نتیجه، تمام متغیرهای ولتاژی و جریانی در چنین مداری، برحسب فازور بیان شده‌اند. بعلاوه اگر مدار مذکور دارای منابع وابسته نیز باشد، معادلات این منابع به جمع معادلات حلقه افزوده می‌شوند. پس از حل معادلات و تعیین فازور جریان‌های حلقه، می‌توان معادلات زمانی این جریان‌ها را نوشت. این روند را در مثال (۷-۱۱) شاهد خواهیم بود.

مثال (۷-۱۱): برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۱۹) و با استفاده از روش تحلیل حلقه، ولتاژ $\vec{V}_{AB}$ را بیابید.



شکل (۷-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۱۱)

حل: ابتدا با توجه به اینکه مدار مذکور دارای دو حلقه است، لذا معادلات KVL را برای این دو حلقه می‌نویسیم:

$$-10\angle 0^\circ + 96\vec{I}_1 + (100 + 4 + j200)(\vec{I}_1 - \vec{I}_2) = 0$$

$$(1 - j50 + 100)\vec{I}_2 + (100 + 4 + j200)(\vec{I}_2 - \vec{I}_1) = 0$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت:

$$\vec{I}_1 = 5/0.53 \times 10^{-2} \angle -0.736^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_2 = 4/484 \times 10^{-2} \angle 25.6^\circ \text{ A}$$

حال با تشکیل یک حلقه، ولتاژ $\vec{V}_{AB}$ را محاسبه می‌کنیم.

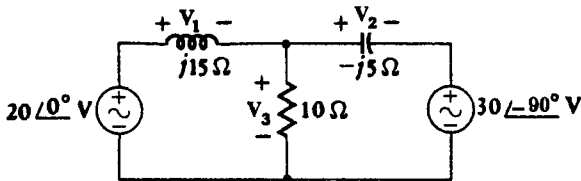
$$\vec{V}_{AB} + 100\vec{I}_4 + (4 + j200)(\vec{I}_4 - \vec{I}_1) = 0$$

با معلوم بودن $\vec{I}_1$ و $\vec{I}_4$ ، $\vec{V}_{AB}$ برابر می‌شود با:

$$\vec{V}_{AB} = 0$$

لازم به ذکر است که مدار مذکور، یک نوع پل AC است و رفتاری شبیه پل وتسون دارد؛ زیرا به ازای $\vec{V}_{AB}$ ، پل به طور متعادل در آمده و روش مفیدی را برای تعیین دقیق بسیاری از پارامترها از راه این آزمایش ارائه می‌دهد.

تمرین (۶-۷): برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۲۰)، ولتاژهای $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ را با استفاده از روش حل حلقه تعیین نمایید. لازم به ذکر است که فرکانس هر دو منبع با هم برابر می‌باشند.



شکل (۷-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۶-۷)

جواب: $\vec{V}_4 = 36/9\angle -65/7$ ، $\vec{V}_3 = 15/62\angle -13/32$ ، $\vec{V}_1 = 33/9\angle 81/9$

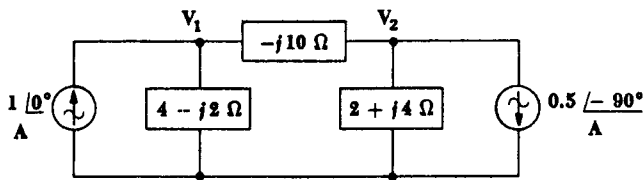
۶-۷- تجزیه و تحلیل جمع آثار در حالت دائمی سینوسی

با توجه به آنکه در این کتاب، در مورد عناصر با مشخصات خطی تغییرناپذیر با زمان بحث می‌کنیم، لذا خاصیت جمع آثار را برای یافتن پاسخ موردنظر به ازای منابع ورودی مختلف در فصول ابتدایی برای مدارهای الکتریکی مطرح نمودیم. حال اگر در مداری، منابع ورودی نابسته به صورت منابع سینوسی باشند، آنگاه باز هم می‌توانیم تحلیل مدارها را به روش جمع آثار و براساس کاربرد فازورها ارائه نماییم. البته مزیت بسیار مهمی که تجزیه و تحلیل مدارهای با تحریک سینوسی براساس روش جمع آثار نسبت به روش‌های تحلیل گره و حلقه دارد، این است که امکان وجود منابع ورودی با فرکانس‌های مختلف نیز وجود دارد. علت این موضوع آن است که در روش جمع آثار در حالت دائمی سینوسی، فقط یک منبع در هر تحلیل، مورد توجه است. پس می‌توان شبکه را در حوزه فرکانس بر حسب

فرکانس منبع موردنظر تعیین نمود. اما در روش تحلیل حلقه و گره، باید تمام منابع سینوسی با یک فرکانس می‌بودند.

مثال (۷-۱۲): مدار ارائه شده در شکل (۷-۱۸) مفروض است. با استفاده از خاصیت جمع‌آثار، ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.

حل: در مدار مذکور ابتدا به ساده سازی مدار می‌پردازیم. این کار با موازی کردن جفت جفت امپدانس‌ها صورت می‌گیرد. امپدانس‌های مقاومت 5Ω و خازن $-j10\Omega$ با هم موازی هستند که حاصل آن $4-j2\Omega$ می‌شود. همچنین امپدانس‌های خازن $-j5\Omega$ و سلف $j10\Omega$ با هم موازی هستند که حاصل آن، $2+j4\Omega$ می‌گردد. نهایتاً امپدانس‌های مقاومت 10Ω و سلف $j5\Omega$ با هم موازی می‌باشند که نتیجه آن، $2+j4\Omega$ می‌شود. این مدار ساده شده در شکل (۷-۲۱) دوباره رسم شده است.



شکل (۷-۲۱): مدار الکتریکی ساده شده مربوط به مثال (۷-۱۲)

برای به‌دست آوردن ولتاژ $\vec{V}_1$ ، ابتدا اثر منبع جریان سمت چپ را در نظر می‌گیریم که با زیرنویس L مشخص شده و منبع جریان سمت راست را قطع (مدار باز) می‌کنیم. لذا داریم:

$$\vec{V}_{1L} = (1\angle 0) \frac{(4-j2)(-j10+2+j4)}{4-j2-j10+2+j4} = \frac{-4-j28}{6-j8} = 2-j2$$

در مرحله دوم، اثر منبع جریان سمت راست را محاسبه می‌کنیم که با زیرنویس R مشخص می‌کنیم. در این حالت، منبع جریان سمت چپ را قطع (مدار باز) می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{V}_{1R} = (-0.5\angle -90) \left(\frac{(2+j4)}{4-j2-j10+2+j4} \right) (4-j2) = \frac{-6+j8}{6-j8} = -1$$

حال دو جواب به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا $\vec{V}_1$ حاصل گردد. یعنی،

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1L} + \vec{V}_{1R} = 2-j2-1 = 1-j2 = 2.24\angle -63.4^\circ \text{ V}$$

اگر همین روال را برای ولتاژ $\vec{V}_2$ تکرار کنیم خواهیم داشت:

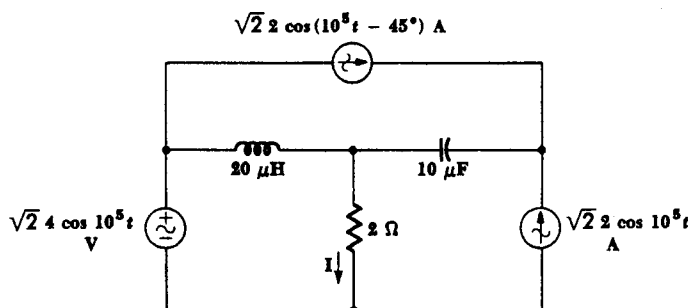
$$\vec{V}_2 = 4.47\angle 116.6^\circ \text{ V}$$

در نهایت با انتقال به حوزه زمان، جواب‌های زیر حاصل می‌شود:

$$v_1(t) = \sqrt{2} \times 2/24 \cos(\omega t - 63/4)$$

$$v_2(t) = \sqrt{2} \times 4/47 \cos(\omega t + 116/6)$$

تمرین (۷-۷): مدار الکتریکی شکل (۷-۲۲) را در نظر بگیرید. با استفاده از اصل جمع آثار، جریان $\vec{I}$ و $i(t)$ (مربوط به فازور $\vec{I}$) را بیابید.



شکل (۷-۲۲): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۷)

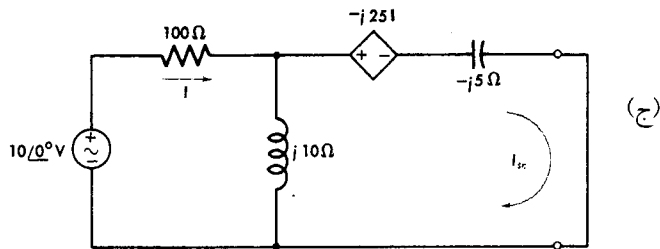
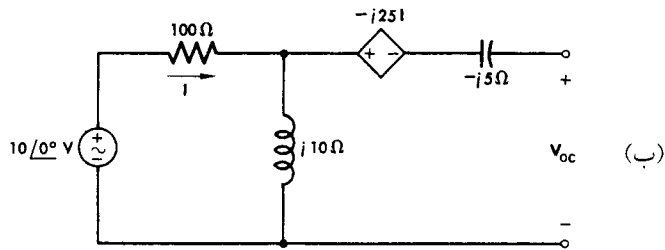
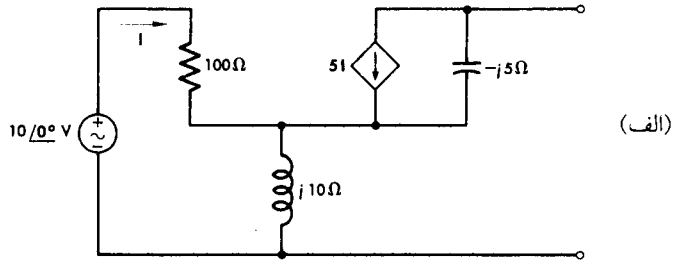
جواب: $i(t) = 3/41\sqrt{2} \cos(10^5 t)$ ، $\vec{I} = (1-j) + (\sqrt{2}) + (1+j) = 2 + \sqrt{2}$

۷-۷- تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از مدار معادل تونن

همان‌گونه که در تحلیل مدارها در بخش‌های قبلی اشاره نمودیم، روش تحلیل مدارها و نوشتن معادلات ولتاژ و جریان در مدارهای DC و AC (تغذیه با منابع سینوسی) یکسان می‌باشد و تنها تفاوتی که دارد، آن است که در مدارهای با تحریک سینوسی، از نمایش فازوری متغیرها و عناصر شبکه استفاده می‌شود. این روند به قضیه مدار معادل تونن هم قابل گسترش است و با استفاده از دو آزمایش مدار باز و اتصال کوتاه، می‌توان مدار معادل تونن مدارهای با تحریک سینوسی را محاسبه نمود. با آزمایش مدار باز می‌توان $\vec{V}_{oc}$ را تعیین نمود که همان ولتاژ منبع مدار معادل تونن است. با آزمایش اتصال کوتاه هم جریان $\vec{I}_{sc}$ محاسبه می‌شود که با استفاده از آن، امپدانس مدار معادل تونن را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$\vec{Z}_{eq} = \frac{\vec{V}_{oc}}{\vec{I}_{sc}} \quad (۷-۶۴)$$

مثال (۷-۱۳): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۲۳-الف) مفروض است. مدار معادل تونن شبکه را از دو سر خروجی آن بیابید.



شکل (۷-۲۳): الف) مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۱۳)؛ ب) مدار برای محاسبه ولتاژ مدار باز؛ ج) مدار برای محاسبه جریان اتصال کوتاه

حل: برای تعیین ولتاژ مدار باز $\vec{V}_{oc}$ ، ابتدا شکل (۷-۲۳-الف) را به شکل (۷-۲۳-ب) تبدیل می‌کنیم. برای تعیین $\vec{V}_{oc}$ ، ابتدا معادله KVL را در حلقه سمت چپ می‌نویسیم:

$$-10\angle 0^\circ + 100\vec{I} + j10\vec{I} = 0$$

$$\vec{I} = \frac{10}{100 + j10} = \frac{1}{10 + j1}$$

سپس با نوشتن معادله KVL در حلقه سمت راست خواهیم داشت:

$$\vec{V}_{oc} = -(-j25\vec{I}) + j10\vec{I} = j35\vec{I} = 3/48\angle 84/37^\circ$$

حال برای محاسبه جریان اتصال کوتاه $\bar{I}_{sc}$ از مدار ارائه شده در شکل (۷-۲۳-ج) استفاده می‌شود. لذا در این مدار با نوشتن دو معادله KVL برای دو حلقه مدار خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -10\angle 0^\circ + 10\bar{I} + j10(\bar{I} - \bar{I}_{sc}) = 0 \\ -j25 - j5(\bar{I}_{sc}) + j10(\bar{I}_{sc} - \bar{I}) = 0 \end{cases}$$

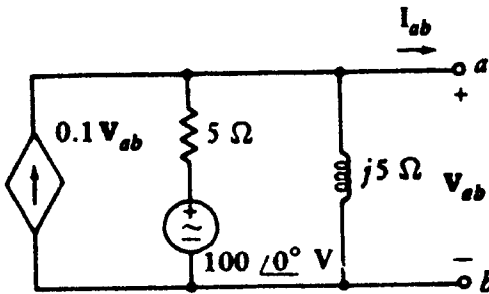
با حذف جریان $\bar{I}$ از دسته معادلات اخیر، جریان $\bar{I}_{sc}$ به مقدار زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{I}_{sc} = 0.6\angle 31^\circ \text{ A}$$

در نتیجه، امپدانس مدار معادل تونن برابر خواهد بود با:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}_{oc}}{\bar{I}_{sc}} = \frac{3/48\angle 84/3^\circ}{0.6\angle 31^\circ} = 5/8\angle 53/3^\circ \Omega$$

تمرین (۷-۸): مدار معادل تونن مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۲۴) را بیابید.



شکل (۷-۲۴): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۸)

جواب: $\bar{Z}_{eq} = 2 + j4 \Omega$ ، $\bar{V}_{oc} = 89/4\angle 63/4^\circ \text{ V}$

۷-۸- توان در مدارهای با تحریک سینوسی

یک شبکه یک قطبی N را در نظر بگیرید که از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده باشد. این شبکه به یک مولد متصل شده است که تحت ولتاژ $v(t)$ ، جریان $i(t)$ را دریافت می‌کند. اگر این جریان و ولتاژ به صورت زیر باشد:

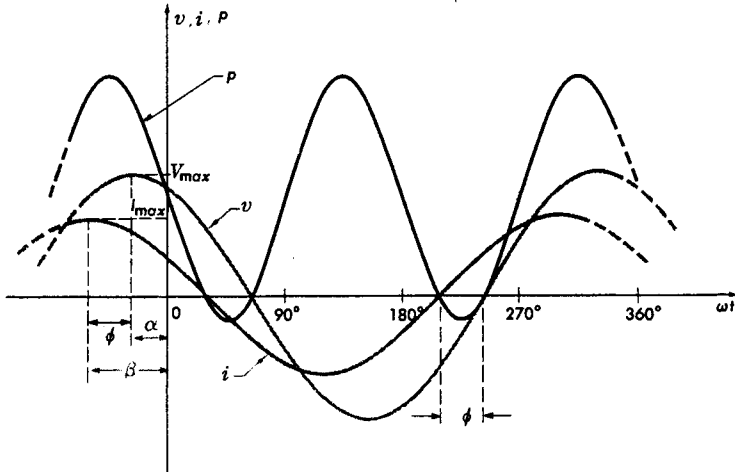
$$v(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I_{rms} \cos(\omega t + \beta)$$

آنگاه توان لحظه‌ای از حاصل ضرب این ولتاژ و جریان حاصل می‌شود. یعنی،

$$p(t) = v(t)i(t) = V_{rms}I_{rms} \cos(\alpha - \beta) + V_{rms}I_{rms} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \quad (7-65)$$

منحنی‌های $i(t)$ ، $v(t)$ و $p(t)$ در شکل (۷-۲۵) نشان داده شده است. در زمانی که $p(t) > 0$ است به این معنی است که جهت توان لحظه‌ای از مولد به سمت شبکه است و اگر $p(t) < 0$ گردد، آنگاه جهت انتقال توان لحظه‌ای از شبکه به سمت مولد است. حال می‌خواهیم بدانیم متوسط این توان لحظه‌ای چقدر است؟ برای این منظور، توان متوسط P_{av} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل (۷-۲۵): شکل موج‌های $v(t)$ ، $i(t)$ و $p(t)$

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

اما جمله دوم در رابطه (۷-۶۵) به خاطر جمله کسینوسی آن، دارای مقدار متوسط صفر است؛ زیرا به صورت یک تابع نوسانی با مقدار متوسط صفر است. لذا،

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) = V_{rms} I_{rms} \cos \phi \quad (۷-۶۶)$$

به این توان متوسط، توان حقیقی (اکتیو) می‌گویند که بر حسب وات (W) اندازه‌گیری می‌شود.

مقدار زاویه $\alpha - \beta$ را زاویه ضریب قدرت می‌نامیم و با ϕ نشان می‌دهیم. همچنین به $\cos \phi$ هم ضریب قدرت^۱ شبکه می‌گویند. حال اگر در شبکه‌ای $\alpha > \beta$ باشد (یعنی زاویه فازور ولتاژ، جلوتر از زاویه فازور جریان باشد) آنگاه $\phi > 0$ خواهد بود که در این حالت، ضریب قدرت را از نوع پس‌فازی^۲ می‌گویند. مفهوم پس‌فاز بودن به این معنی است که زاویه فازور جریان از زاویه فازور ولتاژ، عقب‌تر است (ملاک مقایسه براساس زاویه فازور

^۱ - Power Factor

^۲ - Lag

ولتاژ است). همچنین اگر در شبکه‌ای $\alpha < \beta$ باشد به این معنی است که زاویه فازور جریان، جلوتر از زاویه فازور ولتاژ می‌باشد ($\phi < 0$). در این حالت، ضریب قدرت را از نوع پیش‌فازی^۱ می‌گویند؛ یعنی زاویه فازور جریان نسبت به زاویه فازور ولتاژ، پیش‌فاز (جلوتر) است.

۷-۸-۱- توان در یک بار اهمی با تحریک سینوسی

در بخش (۷-۳-۱) روابط فازوری را برای یک عنصر مقاومت بیان کردیم. دیدیم که اگر فازور ولتاژ دو سر بار اهمی به صورت $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد، آنگاه فازور جریان عبوری از آن به مقدار $\vec{I} = I_{rms} \angle \alpha$ خواهد بود؛ یعنی زاویه فازور ولتاژ و جریان در بار اهمی با هم برابر است. پس توان حقیقی در یک مقاومت برابر است با:

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) = V_{rms} I_{rms} = R I_{rms}^2 \quad (۷-۶۷)$$

به عبارت دیگر، در یک بار اهمی، زاویه ضریب قدرت، برابر صفر است ($\phi = 0$) و ضریب قدرت هم برابر واحد می‌باشد ($\cos \phi = 1$).

۷-۸-۲- توان در یک بار سلفی خالص با تحریک سینوسی

در بخش (۷-۳-۲) روابط فازوری را برای یک عنصر سلف بیان نمودیم. حال فرض کنید که ولتاژ اعمالی به یک سلف به شکل تابع سینوسی است که فازور آن، برابر $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد. با توجه به آنکه امپدانس یک سلف به مقدار jX_L است لذا جریان عبوری از سلف برابر است با:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{jX_L} = \frac{V_{rms}}{X_L} \angle \alpha - 90^\circ \quad (۷-۶۸)$$

در نتیجه، زاویه ضریب قدرت که از تفاضل زاویه فازور ولتاژ و جریان حاصل می‌شود، به مقدار زیر است:

$$\phi = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha - 90^\circ) = 90^\circ$$

و ضریب قدرت برابر $\cos \phi = 0$ می‌گردد. پس نتیجه می‌گیریم که توان حقیقی در یک سلف، به مقدار صفر است. به عبارت دیگر، سلف هیچ توان مفیدی از شبکه دریافت نمی‌کند. اما برای درک بهتر توان لحظه‌ای منتقل شده، توان موهومی (راکتیو) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^۱ - Lead

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin \phi \quad (۶۹-۷)$$

که Q میزان توان موهومی است و برحسب ولت آمپر راکتیو (VAR) سنجیده می‌شود. براساس این تعریف، توان موهومی یک سلف برابر است با:

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin ۹۰ = V_{rms} I_{rms} = (X_L I_{rms}) I_{rms} = X_L I_{rms}^2 \quad (۷۰-۷)$$

این توان موهومی، مقدار متوسط توانی است که در $\frac{1}{4}$ سیکل، بین منبع و شبکه رد و بدل می‌شود. به عبارت دیگر، این مقدار توان موهومی در $\frac{1}{4}$ سیکل از سمت منبع به سمت شبکه، و در $\frac{1}{4}$ بعدی سیکل، از سمت شبکه به سمت منبع در جریان خواهد بود (یا به عبارت دیگر، بار سلفی خالص، هیچ انرژی را مصرف نمی‌کند؛ بلکه در $\frac{1}{4}$ سیکل، آن را ذخیره و در $\frac{1}{4}$ بعدی، آن را پس می‌دهد). این منحنی‌ها را می‌توان در شکل (۷-۷) نیز مشاهده نمود.

۷-۸-۳- توان در یک بار خازنی خالص با تحریک سینوسی

روابط فازوری برای یک عنصر خازن را در بخش (۷-۳-۳) بحث کردیم. فرض کنید که ولتاژ اعمالی به یک خازن به صورت یک تابع سینوسی است که فازور آن برابر $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد، آنگاه با توجه به آنکه امپدانس یک خازن به مقدار $-jX_C$ است، لذا جریان عبوری از خازن برابر است با:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{-jX_C} = \frac{V_{rms}}{X_C} \angle \alpha + ۹۰ \quad (۷۱-۷)$$

در نتیجه، زاویه ضریب قدرت برای یک خازن به مقدار زیر خواهد بود:

$$\phi = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha + ۹۰) = -۹۰^\circ$$

البته $\cos \phi = ۰$ می‌گردد. همانگونه که قبلاً هم بیان نمودیم برای تفاوت میان ضریب قدرت صفر برای سلف و خازن از اصطلاح پس فاز و پیش فاز استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، برای سلف، عبارت پس فاز را به کار می‌بریم؛ زیرا زاویه جریان، ۹۰° درجه از زاویه ولتاژ، عقب‌تر (پس فاز) است و برای خازن، کلمه پیش فاز را به کار می‌بریم؛ زیرا زاویه جریان، ۹۰° درجه از زاویه ولتاژ، جلوتر است.

حال با توجه به آنکه ضریب قدرت خازن هم برابر صفر است، پس می‌توان گفت که توان حقیقی یک خازن، برابر صفر می‌باشد. به عبارت دیگر، یک خازن، مشابه یک سلف، هیچ توان مفیدی از شبکه دریافت نمی‌کند. اما میزان توان موهومی (راکتیو) یک خازن برابر مقدار زیر است:

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(-90^\circ) = -V_{rms} I_{rms} =$$

$$= (-X_C I_{rms}) I_{rms} = -X_C I_{rms}^2 = -\frac{V_{rms}^2}{X_C} \quad (7-72)$$

علامت منفی در توان موهومی خازن به این معنی است که در $\frac{1}{4}$ سیکلی که سلف از شبکه، توان موهومی جذب می‌کند، یک خازن، به شبکه، توان می‌دهد و برعکس در $\frac{1}{4}$ بعدی سیکل که توان از سلف به شبکه منتقل می‌شود، در خازن، توان از شبکه به خازن منتقل می‌گردد. این منحنی‌ها در شکل (7-8) قابل مشاهده می‌باشند. از این خاصیت خازن‌ها در اصلاح ضریب توان شبکه‌ها استفاده می‌شود.

7-8-4- ارتباط توان‌های حقیقی، موهومی و ظاهری

توان دیگری که می‌توان برای وسایل مصرفی تعریف نمود، توان ظاهری است. این توان ظاهری از حاصل ضرب ولتاژ مؤثر در جریان مؤثر به دست می‌آید. این توان ظاهری را با عملگر S نشان می‌دهیم که،

$$S = V_{rms} I_{rms} \quad (7-73)$$

با مقایسه روابط توان حقیقی (معادله 7-67)، توان موهومی (معادله 7-69) و توان ظاهری ارائه شده در معادله اخیر به رابطه‌ای میان این سه معادله پی می‌بریم که،

$$P = S \cdot \cos \phi \quad (7-74)$$

$$Q = S \cdot \sin \phi \quad (7-75)$$

و در نتیجه،

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad \text{و} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (7-76)$$

این ارتباط بین P و Q و S را می‌توان از طریق رابطه فازوری نیز بیان نمود. بدین منظور توان مختلط $\vec{S}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^* \quad (7-77)$$

که اندازه فازور $\vec{S}$ از حاصل ضرب V_{rms} و I_{rms} به دست می‌آید و زاویه فازور $\vec{S}$ نیز از اختلاف زاویه فازور ولتاژ و جریان محاسبه می‌شود. این موضوع را می‌توان از طریق دیگری نیز بیان نمود. با فرض آنکه $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ و $\vec{I} = I_{rms} \angle \beta$ باشد و با توجه به آنکه مزدوج بودن یک بردار، باعث منفی شدن زاویه آن می‌گردد، لذا رابطه (7-77) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\vec{S} = (V_{rms} \angle \alpha)(I_{rms} \angle \beta)^* = V_{rms} I_{rms} \angle \alpha - \beta = V_{rms} I_{rms} \angle \phi$$

حال با نوشتن رابطه اخیر به شکل دکارتی آن خواهیم داشت:

$$\vec{S} = V_{rms} I_{rms} \cos \phi + j V_{rms} I_{rms} \sin \phi$$

با توجه به تعاریفی که برای توان حقیقی P و توان موهومی Q بیان نمودیم آنگاه می‌توان گفت که رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{S} = P + jQ \quad (۷۸-۷)$$

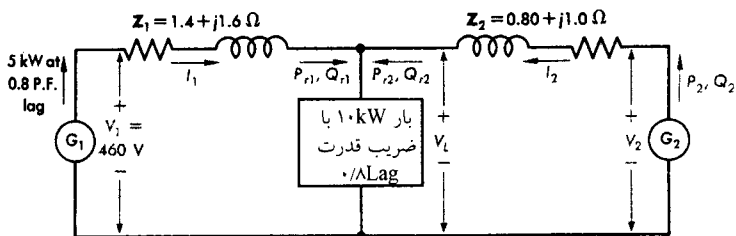
به عبارت دیگر، توان حقیقی P ، قسمت حقیقی از فازور توان ظاهری $\vec{S}$ ، و توان موهومی Q ، قسمت موهومی از فازور توان ظاهری $\vec{S}$ می‌باشد. از این روابط نیز در می‌یابیم که،

$$Q = P \cdot \tan \phi = S \cdot \sin \phi \quad (۷۹-۷)$$

$$P = Q \cdot \cot \phi = S \cdot \cos \phi \quad (۸۰-۷)$$

حال با استفاده از روابطی که بین توان حقیقی، موهومی و ظاهری با یکدیگر وجود دارد و همچنین روابطی که بین این توان‌ها و مشخصات ولتاژ و جریان هر یک از عناصر وجود دارد می‌توان بسیاری از مدارهای الکتریکی را با معلوم بودن مشخصات توان آنان حل نمود.

مثال (۷-۱۴): شکل (۷-۲۶) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، دو مولد G_1 و G_2 (به عنوان دو منبع ولتاژ) یک بار را تغذیه می‌کنند. در شرایطی از مدار که بار موردنظر، توان 10 kW را در ضریب قدرت 0.8 پس‌فاز دریافت می‌کند، منبع G_1 با ولتاژ دو سر مؤثر 460 V ، توان 5 kW را در ضریب قدرت 0.8 پس‌فاز تولید می‌کند. در این شرایط، ولتاژ $\vec{V}_L$ و نیز توان حقیقی و موهومی تولیدی منبع G_2 را بیابید.



شکل (۷-۲۶): سیستم الکتریکی مربوط به مثال (۷-۱۴)

حل: در ابتدا با توجه به اینکه در منبع G_1 ، ولتاژ و توان حقیقی (اکتیو) آن مشخص است، پس جریان تولیدی توسط این منبع را از رابطه (۷-۶۶) تعیین می‌کنیم.

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1 \cos \phi_1} = \frac{5000}{460 \times 0.8} = 13.6 \text{ A}$$

اما با توجه به آنکه ضریب قدرت منبع به صورت پس فاز است، پس اگر زاویه ولتاژ منبع را صفر اختیار کنیم (یعنی $\vec{V}_1 = 460 \angle 0^\circ$) آنگاه با توجه به آنکه در ضریب قدرت پس فاز، $\phi > 0$ است، لذا زاویه جریان منبع برابر است با:

$$\beta = \alpha - \phi = 0 - \cos^{-1} 0.8 = -36.87^\circ$$

در نتیجه،

$$\vec{I}_1 = 13.6 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

حال با استفاده از قانون KVL، فازور ولتاژ دو سر بار به مقدار زیر خواهد بود:

$$\vec{V}_L = \vec{V}_1 - \vec{Z}_1 \vec{I}_1 = 460 \angle 0^\circ - (1/4 + j1/6)(13.6 \angle -36.87^\circ) = 431.76 \angle -0.79^\circ \text{ V}$$

اکنون نوبت به بار می‌رسد تا جریان مصرفی آن را تعیین کنیم. مشابه حالت قبل، جریان بار برابر است با:

$$I_L = \frac{P_L}{V_L \cos \phi_L} = \frac{10000}{431.76 \times 0.8} = 28.95 \text{ A}$$

بعلاوه، با توجه به آنکه ضریب قدرت بار نیز به صورت پس فازی است پس $\phi_L > 0$ است (لازم به ذکر است که ϕ_L اختلاف زاویه فازور ولتاژ و جریان دو سر بار است). در نتیجه، زاویه جریان $\vec{I}_L$ که با β_L نشان می‌دهیم برابر خواهد بود با:

$$\beta_L = \alpha_L - \phi_L = -0.79 - \cos^{-1} 0.8 = -37.66^\circ$$

که α_L زاویه فازور ولتاژ $\vec{V}_L$ است. در نهایت، فازور جریان $\vec{I}_L$ برابر رابطه زیر می‌شود:

$$\vec{I}_L = I_L \angle \phi_L = 28.95 \angle -37.66^\circ$$

اکنون با توجه به جهت جریانی که برای $\vec{I}_1$ ، $\vec{I}_2$ و $\vec{I}_L$ در نظر گرفته شده است در می‌یابیم که،

$$\vec{I}_2 = \vec{I}_L - \vec{I}_1 = 28.95 \angle -37.66^\circ - 13.6 \angle -36.87^\circ = 15.35 \angle -38.36^\circ$$

با توجه به محاسبه $\vec{I}_2$ و با استفاده از قانون KVL برای حلقه سمت راست می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_L + \vec{Z}_2 \vec{I}_2 = 431.76 \angle -0.79^\circ + (0.8 + j1)(15.35 \angle -38.36^\circ) = \\ &= 450.88 \angle -0.19^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

برای آنکه توان حقیقی و موهومی مربوط به منبع G_2 را بیابیم، باید فازورهای ولتاژ و جریان آن را داشته باشیم. لذا با محاسبه فازور $\vec{V}_2$ و $\vec{I}_2$ خواهیم داشت:

$$\vec{S}_2 = \vec{V}_2 \vec{I}_2^* = (450.88 \angle -0.19^\circ)(15.35 \angle 38.36^\circ)$$

$$= 6921.38/17^\circ = 5441/16 + j4277/16$$

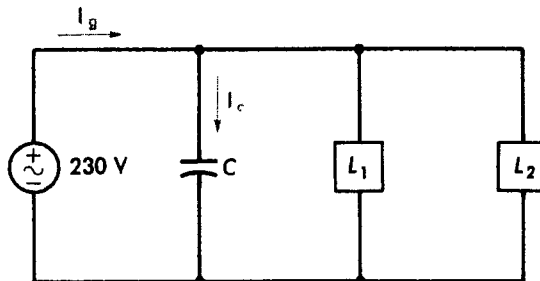
$$P_2 = 5441/16 \text{ W}, \quad Q_2 = 4277/16 \text{ VAR}$$

همان‌گونه که در این مثال مشخص است، منابع G_1 و G_2 توان موهومی زیادی را برای تأمین توان موهومی بار تولید می‌کنند. البته درصد زیادی از این توان، توسط امپدانس‌های $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ مصرف می‌شوند و مابقی، به بار مربوطه منتقل می‌شود. این موضوع باعث می‌گردد که دامنه جریان‌های $\bar{I}_1$ و $\bar{I}_2$ نیز زیاد گردد. برای کاهش دامنه این جریان‌ها کافی است کاری کنیم که توان موهومی مورد نیاز بار، مستقیماً با وسایلی که در کنار آنان نصب می‌شوند تأمین گردند که به این وسایل، خازن‌های الکتریکی می‌گویند. این خازن‌ها تولید کننده توان موهومی هستند و اگر مستقیماً موازی بار نصب گردند، باعث می‌شوند که جریان مربوط به این توان موهومی بار، وارد خطوط (با امپدانس‌های $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$) نگردند که در نتیجه، باعث کاهش دامنه جریان‌ها و کاهش تلفات می‌شوند. بهترین طراحی برای مقدار این خازن‌ها آن است که تمام توان موهومی بار، توسط خازن‌ها تأمین شود. به عبارت دیگر، ضریب قدرت بار به مقدار واحد افزایش یابد ($\cos \phi = 1$). روش کار طراحی مقدار این خازن‌ها را در مثال زیر خواهیم دید.

مثال (۷-۱۵): یک منبع مولدی 230V ، 60Hz ، دو بار الکتریکی L_1 و L_2 را مطابق شکل (۷-۲۷) تغذیه می‌کند. بار $\bar{Z}_1$ توان 10kW را با ضریب قدرت 0.8 پس‌فاز و بار L_2 توان 10kVA را با ضریب قدرت 0.6 پس‌فاز دریافت می‌کند. برای بهبود ضریب قدرت این دو بار از یک خازن موازی با آنها استفاده می‌شود.

الف) مقدار ظرفیت خازنی C را به گونه‌ای طراحی کنید که ضریب قدرت مولد، برابر یک گردد.

ب) با وجود خازن محاسبه شده در حالت (الف)، جریان خازن را بیابید.



شکل (۷-۲۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۱۵)

حل: الف) برای آنکه ظرفیت خازنی C را بیابیم، ابتدا باید توان موهومی مورد نیاز دو بار L_1 و L_2 را بیابیم. بدین منظور ابتدا Q_{L1} و Q_{L2} را می‌یابیم.

$$P_{L1} = 10 \text{ kW}$$

$$Q_{L1} = P_{L1} \cdot \tan \phi_1 = 10 \times \tan(\cos^{-1} 0.8) = 7.5 \text{ kVAR}$$

$$P_{L2} = 10 \times 0.6 = 6 \text{ kW}$$

$$Q_{L2} = 6 \times \tan \phi_2 = 6 \tan(\cos^{-1} 0.6) = 8 \text{ kVAR}$$

در نتیجه، مجموع توان حقیقی و موهومی دو بار برابر است با:

$$P_T = 10 + 6 = 16 \text{ kW}$$

$$Q_T = 7.5 + 8 = 15.5 \text{ KVAR}$$

با توجه به آنکه می‌خواهیم $\cos \phi = 1$ گردد لذا توان موهومی خازن باید مساوی توان موهومی بارها باشد. یعنی،

$$Q_C = -Q_T = -15.5 \text{ kVA}$$

حال با توجه به رابطه (۷-۷۲) می‌توان نوشت:

$$X_C = -\frac{V_{rms}^2}{Q_C} = -\frac{230^2}{-15.5 \times 10^3} = 3.41 \Omega$$

در نهایت با توجه به رابطه $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ، ظرفیت خازنی C به مقدار زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 3.41} = 7.78 \times 10^{-4} \text{ F} = 778 \mu\text{F}$$

(ب) در صورتی که خازن، نصب نشده باشد آنگاه توان ظاهری کل دو بار برابر است با:

$$\vec{S}_L = 16 + j15.5 \text{ kVAR}$$

با توجه به آنکه $\vec{V} = 230 \angle 0^\circ$ می‌باشند در نتیجه مجموع جریان دو بار را می‌توان با استفاده از رابطه (۷-۷۷) به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\vec{I}_L = \left(\frac{\vec{S}_L}{\vec{V}} \right)^* = \left(\frac{16 + j15.5}{230} \right)^* = 96/86 \times 10^{-3} \angle -44/1^\circ \text{ kA} =$$

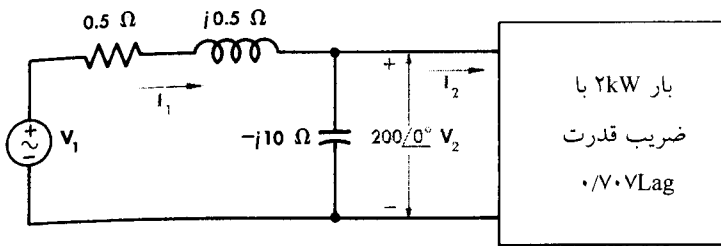
$$= 96/86 \angle -44/1^\circ \text{ A}$$

که این مقدار، مجموع جریان دو بار می‌باشد که باید از مولد کشیده شود. حال اگر خازن طراحی شده در قسمت (الف) در مدار قرار گیرد، آنگاه توان موهومی کشیده شده از منبع، صفر خواهد بود؛ زیرا تمام توان موهومی بار توسط خازن تولید می‌گردد. لذا،

$$\vec{I}_L = \left(\frac{\vec{S}_G}{\vec{V}} \right)^* = \left(\frac{16 + j0}{230} \right)^* = 0.0696 \angle 0^\circ \text{ kA} = 69/6 \text{ A}$$

دیده می‌شود که تصحیح ضریب قدرت، تأثیر بسیار زیادی در کاهش جریان مولد دارد.

تمرین (۷-۹): مدار ارائه شده در شکل (۷-۲۸) مفروض است. الف) فازور جریان $\vec{I}_T$ را بیابید؛ ب) فازور جریان $\vec{I}_1$ و ولتاژ منبع $\vec{V}_1$ را محاسبه کنید؛ ج) توان حقیقی، موهومی و ظاهری تولید شده توسط منبع را بیابید.



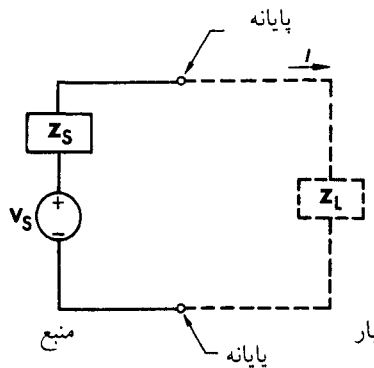
شکل (۷-۲۸): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۷-۹)

جواب: الف) $\vec{I}_Y = 14/14 \angle -45^\circ$ (ب) $\vec{I}_1 = 14/14 \angle 44/99^\circ$ ، $\vec{V}_1 = 200/2 \angle 2/86^\circ$ (ج) $S = 2831 \text{ VA}$ ، $P = 2099 \text{ W}$ ، $Q = -1899 \text{ VAR}$

۷-۹- قضیه حداکثر توان انتقالی

مطلب بسیار مهمی که در مدارهای الکتریکی وجود دارد آن است که چگونه می‌توان مداری را طراحی کرد، به گونه‌ای که حداکثر توان به بار موردنظر انتقال یابد. فرض کنید که یک شبکه الکتریکی با متعلقات آن به یک بار الکتریکی با امپدانس $\vec{Z}_L$ متصل شده باشد. حال سؤال را به این صورت مطرح می‌کنیم که میزان امپدانس بار موردنظر (یعنی $\vec{Z}_L$) به چه مقدار باشد تا از شبکه الکتریکی، حداکثر توان ممکن به این بار انتقال یابد؟

برای پاسخ به این سؤال، ابتدا شبکه الکتریکی موردنظر را از دو سر بار $\vec{Z}_L$ به صورت مدار معادل تونن در می‌آوریم. به عبارت دیگر، شبکه الکتریکی با یک منبع با فازور $\vec{V}_S$ و یک امپدانس $\vec{Z}_S$ به صورت مدل تونن ساده سازی می‌شود. این مرحله کار براساس روش بیان شده در بخش (۷-۷) می‌باشد. این مدار را می‌توان در شکل (۷-۲۹) مشاهده نمود.



شکل (۷-۲۹): مدار معادل تونن شبکه به همراه بار متصل به آن

این قضیه بیان می‌کند که برای آنکه توان حقیقی منتقل شده به بار با امپدانس $\bar{Z}_L$ به حداکثر خود برسد باید $\bar{Z}_L = \bar{Z}_S^*$ باشد که علامت * به معنای مزدوج است. به عبارت دیگر می‌بایست امپدانس بار برابر مزدوج امپدانس کل شبکه دیده شده از سمت بار $\bar{Z}_L$ باشد.

برای اثبات این موضوع، ابتدا باید رابطه توان حقیقی بار را محاسبه نماییم. فرض کنید که $\bar{Z}_S = R_S + jX_S$ و $\bar{Z}_L = R_L + jX_L$ باشد. با توجه به آنکه سلف بار با راکتانس القایی X_L هیچ‌گونه توان حقیقی مصرف نمی‌کند، لذا توان حقیقی بار، فقط ناشی از R_L می‌باشد. در نتیجه،

$$P_L = R_L \cdot I_{rms}^2 \quad (۸۱-۷)$$

که I_{rms} اندازه فازور جریان مدار می‌باشد. با توجه به آنکه فازور جریان مدار برابر،

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_L}{\bar{Z}_S + \bar{Z}_L} \quad (۸۲-۷)$$

است، آنگاه اندازه فازور جریان برابر است با:

$$I_{rms} = |\bar{I}| = \frac{|V_S|}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}} \quad (۸۳-۷)$$

که در این رابطه $\bar{Z}_S + \bar{Z}_L = (R_S + R_L) + j(X_S + X_L)$ می‌باشد. حال با جایگزینی رابطه (۸۳-۷) در رابطه (۸۱-۷) خواهیم داشت:

$$P_L = |V_S|^2 \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} \quad (۸۴-۷)$$

حال هدف موردنظر را می‌توان در حداکثر کردن رابطه (۸۴-۷) بیان نمود. در این رابطه مقادیر $|V_S|$ ، R_S و X_S مقدار ثابت و مشخصی هستند و فقط R_L و X_L متغیر هستند. با توجه به آنکه راکتانس بار می‌تواند به صورت مقادیر مثبت (خاصیت سلفی) و یا مقادیر منفی (خاصیت خازنی) باشد آنگاه برای حداکثر شدن P_L از دیدگاه X_L ، باید $X_L = -X_S$ گردد تا جمله دوم در مخرج کسر رابطه (۸۴-۷) به مقدار صفر کاهش یابد. در این حالت، رابطه (۸۴-۷) به رابطه زیر تغییر می‌یابد:

$$P_L = |V_S|^2 \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} \quad (۸۵-۷)$$

حال برای یافتن مقدار مناسب R_L به شرط حداکثر شدن توان انتقالی P_L ، کافی است که از رابطه P_L در معادله (۸۵-۷) نسبت به متغیر R_L مشتق جزئی بگیریم. یعنی،

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = |V_S|^2 \frac{(R_S + R_L)^2 - 2(R_S + R_L)R_L}{(R_S + R_L)^4} = 0 \quad (۸۶-۷)$$

با حل معادله اخیر به این نتیجه می‌رسیم که باید $R_S = R_L$ باشد تا توان حداکثر به بار Z_L منتقل شود. همچنین با شرط قبلی که به دست آورده بودیم (یعنی $X_L = -X_S$) به این نتیجه می‌رسیم که باید،

$$\bar{Z}_L = R_L + jX_L = R_S - jX_S = \bar{Z}_S^*$$

یعنی باید امپدانس بار با مزدوج امپدانس سیستم برابر باشد. با جایگزینی این شرط در رابطه (۷-۸۴) یا (۷-۸۵)، حداکثر توان انتقالی برابر است با:

$$P_{L_{\max}} = \frac{|V_s|^2 R_L}{(R_L + R_L)^2} = \frac{|V_s|^2}{4R_L} = \frac{|V_s|^2}{4R_S}$$

همچنین جریان مدار در این شرایط به مقدار زیر خواهد بود:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_S + \bar{Z}_L} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_S + \bar{Z}_S^*} = \frac{\bar{V}_s}{2R_S}$$

۷-۱۰- خلاصه و نتیجه‌گیری

هدف از ارائه مطالب این فصل، تجزیه و تحلیل مدارهای با تحریک منابع سینوسی می‌باشد. در صورتی که این مدارها در حالت صفر باشند و فقط بخواهیم تحلیل و پاسخ حالت صفر را بیابیم و منابع ورودی نیز به صورت توابع سینوسی باشند، آنگاه می‌توان از خاصیت فازور استفاده نمود. خلاصه مباحث این فصل را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

- در صورتی که یک موج سینوسی به صورت $f(t) = \sqrt{2} F_{rms} \cos(\omega t + \phi)$ باشد آنگاه فازور موج $f(t)$ را می‌توان به صورت $\vec{F} = F_{rms} \angle \phi$ نشان داد. همچنین اگر فازوری به صورت $\vec{G} = G_{rms} \angle \alpha$ باشد و فرکانس موج هم ω باشد آنگاه $g(t) = \sqrt{2} G_{rms} \cos(\omega t + \alpha)$ خواهد بود.

- قواعد KVL و KCL در حوزه زمان را می‌توان در حوزه فرکانس و با استفاده از

خاصیت فازور هم نشان داد. یعنی $\sum_{i=1}^n v_i(t) = 0$ و $\sum_{j=1}^m i_j(t) = 0$ را می‌توان برحسب

خاصیت فازور به صورت $\sum_{i=1}^n \vec{V}_i = 0$ و $\sum_{j=1}^m \vec{I}_j = 0$ نشان داد. البته شرط این خواص آن

است که تمام جریان‌ها و ولتاژها از نوع توابع سینوسی با سرعت زاویه‌ای یکسان باشند.

- روابط بین ولتاژ و جریان عناصر مقاومت، سلف و خازن در حوزه زمان را می‌توان با استفاده از خاصیت فازور به شکل ساده شده $\vec{V} = R \cdot \vec{I}$ ، $\vec{V} = jX_L \cdot \vec{I}$ و $\vec{V} = -jX_C \cdot \vec{I}$

بیان نمود. در این روابط، R مقاومت، X_L راکتانس القایی سلف، و X_C راکتانس خازنی می‌باشد.

• در یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان، امپدانس نقطه تحریک $\bar{Z}(j\omega)$ را می‌توان از نسبت $\bar{V}/\bar{I}_S$ تعیین نمود که $\bar{I}_S$ فازور یک منبع جریان بوده و $\bar{V}$ پاسخ ولتاژ شبکه در دو سر منبع جریان است.

• ادیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان برابر $\bar{I}/\bar{V}_S$ است که $\bar{V}_S$ فازور یک منبع ولتاژ بوده و $\bar{I}$ پاسخ جریان شبکه در دو سر منبع ولتاژ است. مشخص است که $\bar{Z} = 1/\bar{Y}$ می‌باشد و بر عکس.

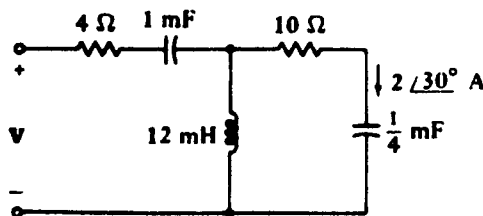
• تحلیل مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی با استفاده از روش گره، حلقه، جمع‌آثار و مدار معادل تونن براساس همان اصول ارائه شده در مدارهای مقاومتی است؛ با این تفاوت که به‌جای R ، L و C و منابع سینوسی، از فازور این عناصر استفاده می‌شود.

• در مدارهای با حالت دائمی سینوسی، می‌توان توان را به سه صورت توان ظاهری S ، توان حقیقی P و توان موهومی Q ارزیابی نمود. ارتباط این سه توان با رابطه $\bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^*$ مشخص می‌شود که قسمت حقیقی فازور $\bar{S}$ به‌معنای توان حقیقی و قسمت موهومی فازور $\bar{S}$ به‌معنای توان موهومی است. این مقادیر توان حقیقی به‌صورت $P = V_{rms} I_{rms} \cos \phi$ و توان موهومی برابر $P = V_{rms} I_{rms} \sin \phi$ می‌باشد.

• شرط انتقال توان حداکثر به یک بار با امپدانس $\bar{Z}_L$ از یک شبکه با امپدانس تونن $\bar{Z}_S$ آن است که امپدانس بار با مزدوج امپدانس شبکه یکسان باشد یعنی باید شرط $\bar{Z}_L = \bar{Z}_S^*$ برقرار گردد تا حداکثر توان حقیقی توسط $\bar{Z}_L$ جذب گردد.

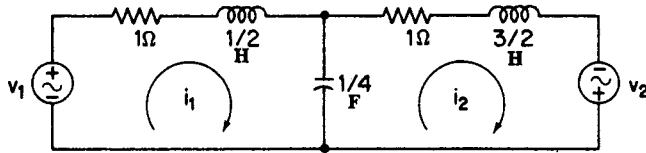
۷-۱۱- مسائل مروری

۱- در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۷-۳۰)، با شرط $\omega = 3000 \text{ rad/sec}$ ، فازور ولتاژ $\bar{V}$ و ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



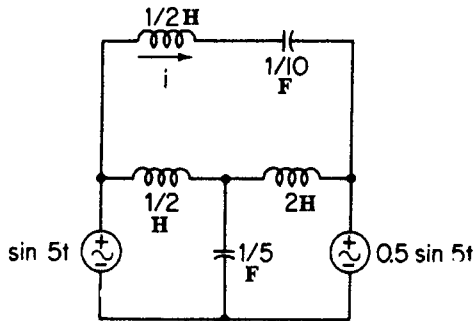
شکل (۷-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

۲- مدار ارائه شده در شکل (۳۱-۷) مفروض می باشد. اگر $v_1(t) = \sqrt{2} \cos 2t$ و $v_2(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ)$ باشد آنگاه جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را در حالت دائمی سینوسی تعیین نمایید.



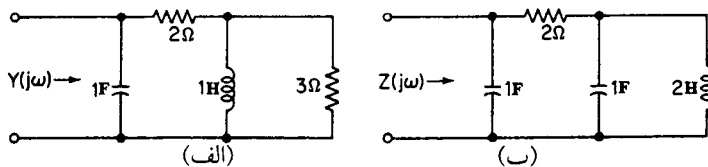
شکل (۳۱-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

۳- مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳۲-۷) در حالت دائمی سینوسی می باشد. در این مدار، $i(t)$ را بیابید.



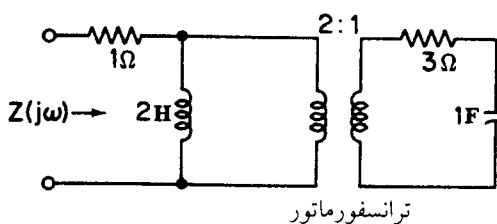
شکل (۳۲-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

۴- برای مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۳-۷) امپدانس $Z(j\omega)$ و ادمیتانس $Y(j\omega)$ را به طور مستقل و جداگانه حساب کنید.



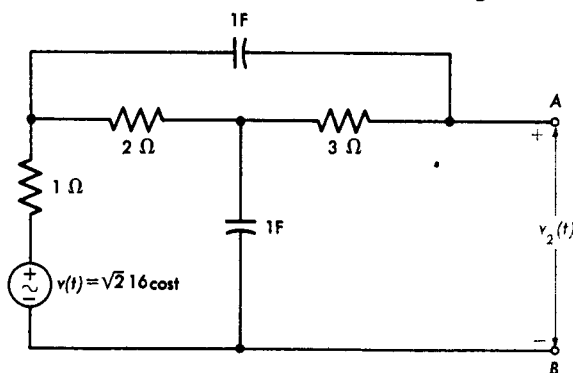
شکل (۳۳-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۴)

۵- در مدار الکتریکی شکل (۳۴-۷) ترانسفورماتور به صورت یک ترانسفورماتور ایده‌آل می باشد. در این مدار، $Z(j\omega)$ را بیابید.



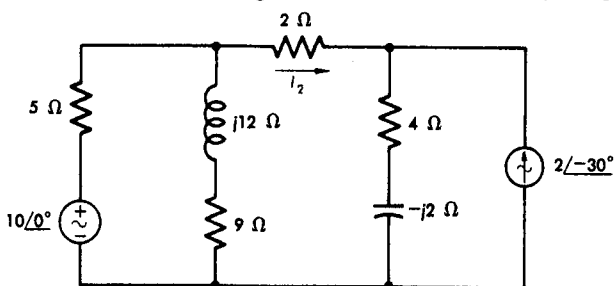
شکل (۷-۳۴): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

۶- ولتاژ $v_2(t)$ را در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۳۵) به کمک تحلیل گره و تحلیل حلقه به طور مستقل و جداگانه محاسبه کنید.



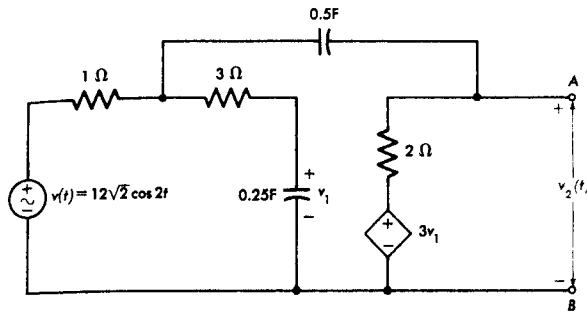
شکل (۷-۳۵): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

۷- با استفاده از روش تحلیل گره، جریان $\bar{I}_2$ را در مدار الکتریکی شکل (۷-۳۶) تعیین نمایید. همچنین همین جریان $\bar{I}_2$ را از روش تحلیل حلقه نیز به دست آورید.



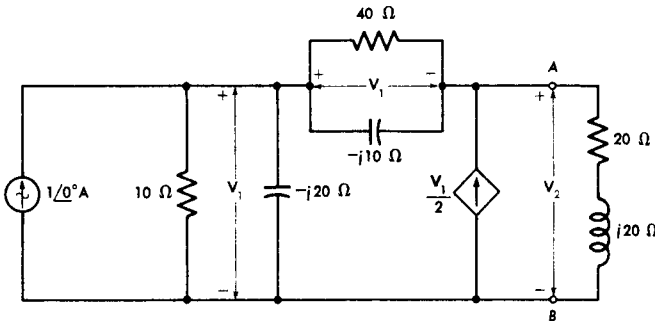
شکل (۷-۳۶): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

۸- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۳۷) مفروض است. در ابتدا با استفاده از روش گره، ولتاژ $v_2(t)$ را در حالت دائمی سینوسی بیابید. سپس جواب خود را با استفاده از روش تحلیل حلقه دوباره به دست آورید.



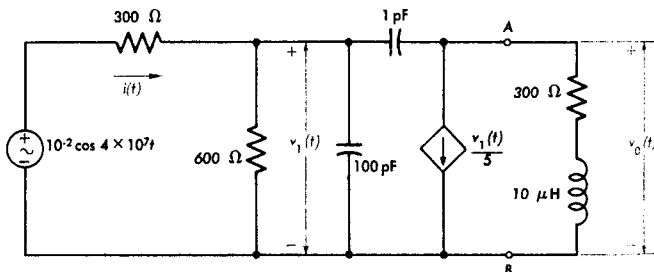
شکل (۷-۳۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۳۸) در حالت دائمی سینوسی قرار دارند. ابتدا با استفاده از روش تحلیل گره و سپس با کاربرد تحلیل حلقه، فازور ولتاژ $\vec{V}_P$ را به دست آورید.



شکل (۷-۳۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- ولتاژ $v_o(t)$ را در حالت دائمی سینوسی برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۳۹) با استفاده از روش حلقه و سپس با استفاده از روش گره محاسبه نمایید. (برای سادگی محاسبات، ابتدا مقاومت 600Ω و راکتانس خازن 100 pF را با هم ترکیب کنید و به صورت یک امپدانس واحد نشان دهید).



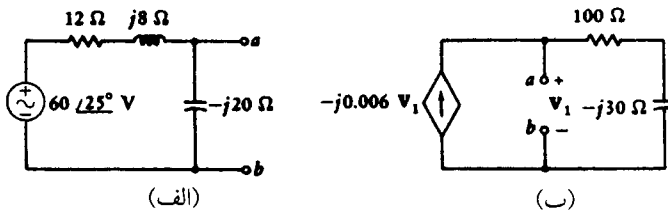
شکل (۷-۳۹): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

۱۱- برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۳۵)، مدار معادل تونن را از دو سر A و B به دست آورید.

۱۲- مدار معادل تونن را از دو سر A و B در مدار الکتریکی شکل (۷-۳۷) محاسبه کنید.

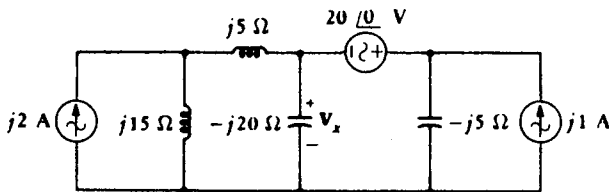
۱۳- از دیدگاه مقاومت 2Ω در مدار ارائه شده در شکل (۷-۳۶)، مدار معادل تونن شبکه را به دست آورید. سپس جریان در مقاومت مذکور را بیابید.

۱۴- مدار معادل تونن از سرهای a و b را در دو شبکه ارائه شده در شکل (۷-۴۰) بیابید.



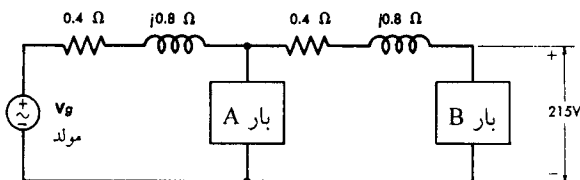
شکل (۷-۴۰): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۱۴)

۱۵- با استفاده از روش جمع آثار، ولتاژ $\vec{V}_x$ را در حالت دائمی سینوسی برای مدار ارائه شده در شکل (۷-۴۱) تعیین کنید.



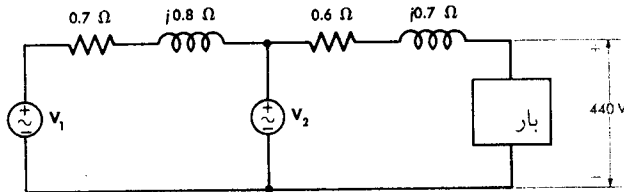
شکل (۷-۴۱): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۵)

۱۶- در شکل (۷-۴۲) یک مولد V_g ، دو بار الکتریکی A و B را تغذیه می کند. بار A توان $8kW$ را در ضریب قدرت 0.8 پیش فاز دریافت می کند و بار B توان $10kW$ را در ضریب قدرت 0.6 پس فاز مصرف می کند. حال اگر ولتاژ بار B برابر $215V$ باشد آنگاه ولتاژ بار A یعنی $\vec{V}_A$ و مقادیر توانهای حقیقی، موهومی و ظاهری تولیدی توسط منبع را بیابید.



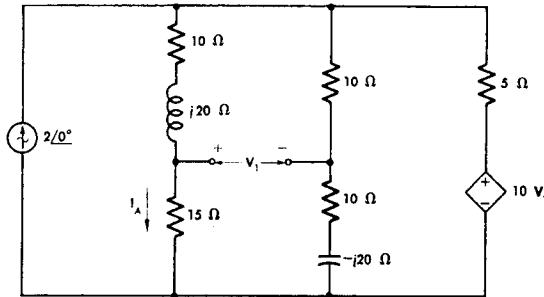
شکل (۷-۴۲): یک سیستم تغذیه بار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۶)

۱۷- در مدار ارائه شده در شکل (۷-۴۳) دو مولد، یک بار 10 kW را با ضریب قدرت 0.8 پس فاز و ولتاژ 440 V ، از طریق یک سیستم توزیع تغذیه می کنند. الف) فازور ولتاژهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را برای دو مولد بیابید؛ ب) اگر مولد $\vec{V}_2$ ، توان 5 kW را با ضریب قدرت 0.6 پس فاز تولید کند، توان ظاهری و ضریب قدرت مولد با ولتاژ $\vec{V}_1$ را محاسبه کنید.



شکل (۷-۴۳): یک سیستم تغذیه بار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۷)

۱۸- در مدار الکتریکی شکل (۷-۴۴) جریان $\vec{I}_A$ و ولتاژ $\vec{V}_1$ را تعیین کنید.



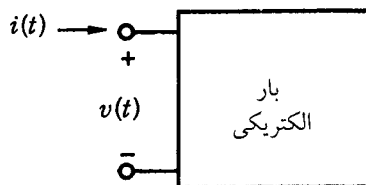
شکل (۷-۴۴): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۸)

۱۹- یک شبکه تک قطبی مطابق شکل (۷-۴۵) را در نظر بگیرید. فرض کنید که،

$$v(t) = \sqrt{2} \times 10 \cos(10^3 t + 60^\circ)$$

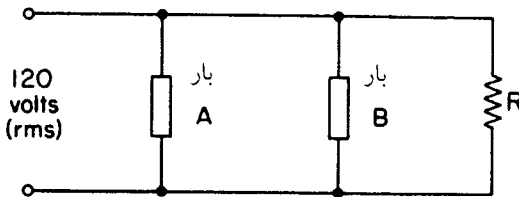
$$i(t) = \sqrt{2} \times 100 \cos 10^3 t$$

الف) توان حقیقی، موهومی و ظاهری فراهم شده برای شبکه تک قطبی موردنظر را بیابید.
ب) امپدانس $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ را از دو سر شبکه موردنظر تعیین کنید.



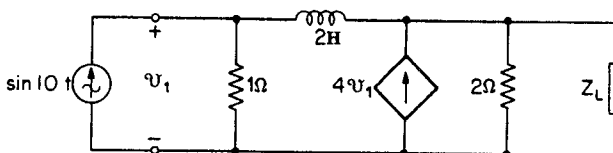
شکل (۷-۴۵): شبکه تک قطبی مربوط به سؤال (۱۹)

۲۰- در سیستم تغذیه ارائه شده در شکل (۷-۴۶)، یک منبع با فازور $120 \angle 0^\circ \text{ V}$ دو بار و یک مقاومت را تغذیه می کند. بار A توان 10 kW را در ضریب قدرت 0.6 پس فاز دریافت می کند و بار B توان 8 kW را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز جذب می کند. حال مقدار مقاومت R را به گونه ای تعیین کنید که ضریب قدرت در منبع ولتاژ به مقدار 0.9 افزایش یابد. البته این روش برای اصلاح ضریب قدرت، روش مفیدی نیست؛ زیرا تلفات انرژی را در سیستم زیاد می کند.



شکل (۷-۴۶): سیستم تغذیه مربوط به سؤال (۲۰)

۲۱- برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۴۷)، امپدانس بار $\bar{Z}_L$ را به گونه ای تعیین کنید که توان انتقالی به آن، به مقدار حداکثر خود برسد. (راهنمایی: از دو سر بار $\bar{Z}_L$ ، مدار معادل تونن مدار سمت چپ بار $\bar{Z}_L$ را بیابید)



شکل (۷-۴۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲۱)

فصل هشتم

تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

۸-۱- مقدمه

در فصل‌های قبلی، روش‌های حل مدارهای الکتریکی را بیان نمودیم که براساس تشکیل معادلات شبکه استوار بود. در این روش‌ها یافتیم که اگر مدار به صورت مقاومتی به همراه منابع الکتریکی بود، معادلات به صورت جبری در می‌آمدند؛ اما اگر مدار مربوطه دارای عناصر سلف و خازن باشند (که معمولاً هم چنین است)، معادلات شبکه به صورت یک سری معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی در می‌آمد که حل این نوع مدارها را با مشکل مواجه می‌کرد. برای حل این گونه مدارها باید از روش‌های حل معادلات با مشتقات مرتبه بالا از قبیل روش تیلور، رانگ کوتا، و ... استفاده نمود. یکی از روش‌های مفید و مؤثر در حل مدارهای الکتریکی، روش تبدیل لاپلاس^۱ می‌باشد که جزء ساده ترین، اساسی ترین، و پرکاربردترین این روش‌ها می‌باشد. البته این روش، فقط مناسب مدارهای الکتریکی با خصوصیات خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد و در دیگر مدارها، تقریباً بی فایده خواهد بود. بدین منظور، در این فصل برآنیم تا خواص تبدیل لاپلاس و روش تبدیل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی را به معادلات جبری بیان نموده و نحوه استفاده از این ابزار را در حل مدارهای الکتریکی بیان نماییم.

^۱ - Laplace Transformation

۸-۲- تعریف تبدیل لاپلاس

روش حل مدارهای الکتریکی با استفاده از تبدیل لاپلاس به این صورت است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده مدار موردنظر از حوزه زمان به حوزه فرکانس مختلط انتقال می‌یابد. با این انتقال، خواهیم دید که معادلات الکتریکی انتقال یافته به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند. تبدیل لاپلاس، یک انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس است. فرض کنید که تابع $f(t)$ که در حوزه زمان تعریف شده است را به حوزه فرکانس منتقل نماییم که آن را با $F(s)$ نمایش می‌دهیم. روش این تبدیل به این صورت است که ابتدا تابع $f(t)$ را در عبارت e^{-st} ضرب می‌کنیم و سپس از تابع به دست آمده در حوزه تعریف $f(t)$ که از زمان 0^- تا ∞ است انتگرال می‌گیریم. به عبارت دیگر،

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1-8)$$

که در این رابطه $\mathcal{L}[f(t)]$ یا $F(s)$ ، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ، و s متغیر فرکانس مختلط می‌باشد. البته شرط برقراری رابطه (۱-۸) آن است که انتگرال رابطه مذکور، همگرا باشد. معمولاً در سیستم‌های فیزیکی واقعی، به‌خاطر شرایط و محدودیت‌های عملی حاکم بر سیستم، شرط مذکور همیشه برقرار می‌باشد.

لازم به ذکر است که کران پایین انتگرال‌گیری، 0^- می‌باشد و این به آن معنا است که شرایط تابع $f(t)$ از لحظه زمان اعمال آن، در انتگرال‌گیری موثر است. به عنوان مثال، اگر $f(t)$ به عنوان یک تابع ضربه در $t=0$ باشد، آنگاه کران پایین 0^- باعث می‌شود که اثر این تابع ضربه در تبدیل لاپلاس آن ظاهر شود؛ به عبارت دیگر، انتگرال‌گیری، این ضربه را در بر خواهد داشت. همچنین معمولاً $f(t)$ را به‌ازای زمان‌های $t < 0$ برابر صفر در نظر می‌گیریم که این مسئله با این واقعیت که رفتار سیستم از لحظه اعمال تحریک آغاز می‌شود، تطابق دارد.

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس در معادله (۱-۸)، تبدیل معکوس لاپلاس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (2-8)$$

که $\mathcal{L}^{-1}$ عملگر تبدیل معکوس لاپلاس می‌باشد.

مثال (۱-۸): تبدیل لاپلاس تابع با $f_1(t)$ ضابطه زیر را بیابید:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل: تابع مذکور، همان تعریف تابع پله واحد $u(t)$ است. با استفاده از رابطه تبدیل لاپلاس (۱-۸) داریم:

$$F_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

لذا می توان نوشت:

$$F_1(s) = \mathcal{L}[F_1(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

مثال (۸-۲): تبدیل لاپلاس مشتق تابع $f(t)$ یعنی $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ را بیابید.
حل: براساس تعریف تبدیل لاپلاس می توان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

حال اگر از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم قادر هستیم که این تبدیل لاپلاس را به دست آوریم. در روش جزء به جزء داشتیم که،

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

حال اگر فرض کنیم که،

$$u = e^{-st} \quad , \quad dv = df(t)$$

آنگاه،

$$v = f(t) \quad , \quad du = -se^{-st} dt$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} u \cdot dv = f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt$$

$$= -f(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

از آنجایی که $\int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ همان تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است، لذا می توان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) \quad (۳-۸)$$

که $f(0^-)$ مقدار تابع $f(t)$ در زمان 0^- می باشد.

تمرین (۸-۱): تبدیل لاپلاس تابع ضربه $f(t) = \delta(t)$ را بیابید.

جواب: $F(s) = 1$

۸-۳- خواص اساسی تبدیل لاپلاس

خواص اساسی ارائه شده در تبدیل لاپلاس، فقط برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان مطرح می‌شود.

۸-۳-۱- خاصیت یکتایی

خاصیت یکتایی تبدیل لاپلاس بدین معنی است که برای یک تابع $f(t)$ تنها یک تبدیل لاپلاس $F(s)$ خواهد داشت و برعکس، تنها یک تابع $f(t)$ در حوزه زمان وجود دارد که تبدیل لاپلاس آن برابر $F(s)$ می‌باشد. این خاصیت را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (۴-۸)$$

۸-۳-۲- خاصیت خطی بودن

یکی از خواص مهم تبدیل لاپلاس، خاصیت خطی بودن آن است. بدین منظور، ابتدا خاصیت همگن بودن این تبدیل را بیان می‌کنیم. فرض کنید که تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $k \cdot f(t)$ (که k یک عدد حقیقی و دلخواه است) برابر است با:

$$\mathcal{L}[k \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} k \cdot f(t) e^{-st} dt = k \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = kF(s) \quad (۵-۸)$$

حال با توجه به آنکه تبدیل لاپلاس، یک رابطه خطی است، آنگاه با استفاده از خاصیت جمع آثار براحتی می‌توان اثبات کرد که تبدیل لاپلاس تابع $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$ برابر $G(s) = F_1(s) + F_2(s)$ خواهد بود. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) \end{aligned} \quad (۶-۸)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۵-۸) و (۶-۸)، می‌توان خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس را به شکل کامل زیر بیان نمود:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s) \quad (۷-۸)$$

مثال (۸-۳): در فصل‌های قبلی، رابطه ولتاژ و جریان یک خازن الکتریکی را به صورت زیر بیان نمودیم:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

که در این رابطه، C مقدار ثابت ظرفیت خازن است. حال فرض کنید که $I(s)$ و $V(s)$ تبدیل لاپلاس متغیرهای $i(t)$ و $v(t)$ باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

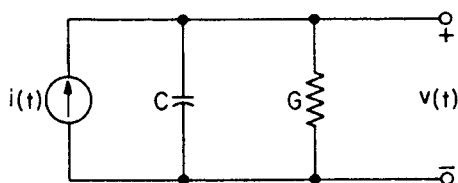
$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)] = \int_0^{\infty} i(t)e^{-st} dt$$

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$

آنگاه با استفاده از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع و خاصیت همگن بودن در تبدیل لاپلاس، رابطه $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ را می توان به شکل زیر بیان نمود:

$$I(s) = C[sV(s) - v(o^-)] = sCV(s) - Cv(o^-)$$

مثال (۸-۴): در شکل (۸-۱) رابطه KCL را در حوزه فرکانس بیان نمایید.



شکل (۸-۱): مدار RC ساده

حل: رابطه KCL در مدار شکل (۸-۱) در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$

حال اگر از دو طرف رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$I(s) = C[sV(s) - v(o^-)] + \frac{V(s)}{R}$$

و در نتیجه،

$$I(s) = (sC + \frac{1}{R})V(s) - Cv(o^-)$$

که در این رابطه، از خواص همگن بودن و خطی بودن تبدیل لاپلاس استفاده شده است.

۸-۳-۳- خاصیت مشتق گیری متوالی

در بخش قبل، تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع را بیان نمودیم. حال می خواهیم ببینیم که

تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه بالای یک تابع $f(t)$ به چه صورت خواهد بود. فرض کنید که $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$ باشد. در نتیجه،

$$\frac{d^{\nu} f(t)}{dt^{\nu}} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} \quad (8-8)$$

آنگاه با استفاده از رابطه (8-3) تبدیل لاپلاس تابع $\frac{dg}{dt}$ برابر است با:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dg}{dt}\right] = s \mathcal{L}[g(t)] - g(o^{-}) \quad (8-9)$$

حال با توجه به آنکه $g(t) = \frac{df}{dt}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\nu} f(t)}{dt^{\nu}}\right] = s \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - \frac{df}{dt}(o^{-})$$

که $\frac{df(o^{-})}{dt}$ مقدار تغییرات $f(t)$ در زمان $t = o^{-}$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (8-3)، رابطه اخیر به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\nu} f(t)}{dt^{\nu}}\right] = s \left[s F(s) - f(o^{-}) \right] - \frac{df}{dt}(o^{-})$$

و در نهایت داریم:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\nu} f(t)}{dt^{\nu}}\right] = s^{\nu} F(s) - s f(o^{-}) - \frac{df}{dt}(o^{-}) \quad (8-10)$$

با گسترش رابطه (8-10) می‌توان به تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه n ام یک تابع $f(t)$ به صورت زیر اشاره نمود:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(o^{-}) - s^{n-2} \frac{df(o^{-})}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(o^{-}) \quad (8-11)$$

مثال (8-5): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (8-2) مفروض می‌باشد. با فرض آنکه ورودی منبع ولتاژ به صورت تابع ضربه $e(t) = \delta(t)$ باشد، می‌خواهیم پاسخ ضربه جریان مدار $i(t)$ را بیابیم که به این پاسخ، $h(t)$ می‌نامیم. بدین منظور با توجه به آنکه $i(o^{-}) = h(o^{-}) = 0$ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$L \frac{dh(t)}{dt} + R h(t) = \delta(t) \quad , \quad h(o^{-}) = 0$$

حال با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله اخیر به صورت زیر در می‌آید:

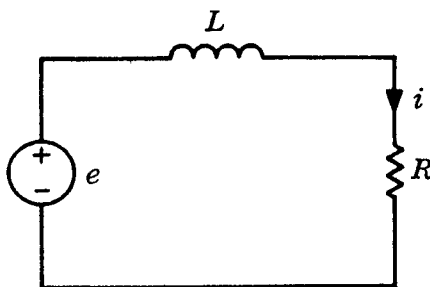
$$L \mathcal{L} \left[\frac{dh}{dt} \right] + R \mathcal{L} [h] = \mathcal{L} [\delta(t)] = 1$$

در نتیجه با بکار بردن قاعده مشتق‌گیری و شرط اولیه پاسخ ضربه خواهیم داشت:

$$(Ls + R) \mathcal{L} [h(t)] = 1$$

$$\mathcal{L} [h(t)] = \frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} u(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$$



شکل (۸-۲): مدار خطی RL تغییرناپذیر با زمان

۸-۳-۴- خاصیت انتگرال‌گیری

خاصیت انتگرال‌گیری، عکس مشتق‌گیری است. برای این منظور، فرض می‌کنیم که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^t f(t') dt'$ را به دست آوریم. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t') dt' \right] e^{-st} dt$$

برای این انتگرال‌گیری از خاصیت انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌شود. با این روش خواهیم داشت:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = \left[\int_0^t f(t') dt' \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} dt$$

در رابطه اخیر، جمله اول برابر صفر می‌باشد؛ زیرا مقدار انتگرال مذکور برای $t = 0^-$ برابر صفر است. در نهایت داریم:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L} [f(t)] \quad (۸-۱۲)$$

مثال (۸-۶): در فصول قبلی بیان نمودیم که رابطه بین ولتاژ و جریان یک خازن به صورت زیر بیان می گردد:

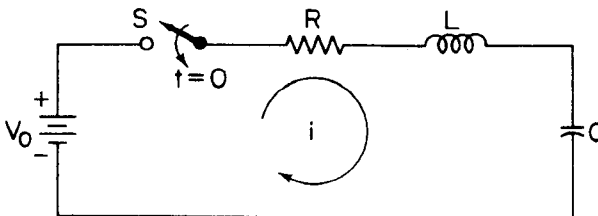
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(\tau) d\tau + v(o^-)$$

حال می خواهیم این رابطه را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به حوزه فرکانس منتقل نماییم. طرف راست رابطه اخیر از یک قسمت انتگرالی و یک جمله ثابت $v(o^-)$ تشکیل شده است. جمله ثابت $v(o^-)$ که همان ولتاژ اولیه خازن است، از زمان $t = o^-$ آغاز شده و تا آخر هم وجود دارد. به عبارت دیگر، به صورت یک تابع پله با دامنه $v(o^-)$ عمل می کند. در نتیجه، با استفاده از رابطه (۸-۱۲) خواهیم داشت:

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(o^-)}{s}$$

که $V(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $v(t)$ و $I(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $i(t)$ می باشد.

مثال (۸-۷): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۳) اگر در لحظه $t = 0$ کلید s بسته شود، با اعمال ورودی منبع ولتاژ به صورت $V_o u(t)$ ، رابطه KVL را در حوزه فرکانس به دست آورید.



شکل (۸-۳): مدار RLC سری

حل: ابتدا معادله KVL را برای حلقه مدار می نویسیم:

$$V_o u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(\tau) d\tau + v_C(o^-)$$

با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس در مشتق گیری و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\frac{V_o}{s} = (R + sL + \frac{1}{sC}) I(s) + \frac{V_C(o^-)}{s} - L i(o^-)$$

مثال (۸-۸): با استفاده از روابط $\int_{o^-}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$ و $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ می توان نتیجه گرفت که:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

تمرین (۸-۲): با استفاده از $k+1$ انتگرال گیری متوالی از تابع پله واحد، اثبات کنید که،

$$\int_0^t \frac{t'^k}{k!} dt' = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{برای } k \text{ صحیح}$$

و سپس با تبدیل لاپلاس از این انتگرال گیری ها به این نتیجه برسید که،

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}} \quad \text{برای } n \text{ صحیح}$$

۸-۴- تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی

در این بخش برآنیم که تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی متداول در حل مدارهای الکتریکی را مورد بررسی قرار داده و خواص آنها را بیان نماییم. در بخش های قبلی بیان نمودیم که تبدیل لاپلاس توابع پله و ضربه به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (۸-۱۳)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (۸-۱۴)$$

- تابع ضربه $\delta(t-t_0)$

به عنوان مثال دیگر، می خواهیم تبدیل لاپلاس تابع ضربه واحد $\delta(t-t_0)$ را به دست آوریم. بدین منظور داریم:

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t-t_0) dt = e^{-st_0} \quad (۸-۱۵)$$

این موضوع از آنجا ناشی می شود که تابع ضربه $\delta(t-t_0)$ فقط در $t=t_0$ غیر صفر است و در بقیه زمان ها دارای مقدار صفر می باشد.

- تابع نمایی $e^{-at}u(t)$

با فرض آنکه ضریب a مقدار مثبتی باشد آنگاه تبدیل لاپلاس $e^{-at}u(t)$ را می توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = \left. \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right|_0^\infty = \frac{1}{s+a} \quad (۸-۱۶)$$

البته رابطه فوق به ازاء $a < 0$ نیز صادق می‌باشد. همچنین اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن برابر تبدیل لاپلاس $u(t)$ است که در رابطه (۸-۱۳) آورده شده است.

- تابع نمایی $e^{j\omega t} u(t)$

مشابه حالت قبل، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t} u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt = \frac{1}{s-j\omega} \quad (17-8)$$

و به‌طور مشابه، تبدیل لاپلاس تابع $e^{-j\omega t} u(t)$ برابر است با:

$$\mathcal{L}[e^{-j\omega t} u(t)] = \frac{1}{s+j\omega} \quad (18-8)$$

- تابع نمایی $\sin \omega t u(t)$ و $\cos \omega t u(t)$

از مبحث ریاضیات پایه می‌دانیم که براساس قاعده اولر^۱ توابع سینوسی و کسینوسی را می‌توان به‌صورت نمایی زیر بیان نمود:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

حال با استفاده از روابط (۸-۱۷) و (۸-۱۸) تبدیل لاپلاس توابع سینوسی و کسینوسی قابل محاسبه می‌باشد که،

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (19-8)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (20-8)$$

این روابط را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق توابع که به‌صورت

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

نیز به‌دست آورد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(\sin \omega t u(t))\right] = s \mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] - \sin \omega t u(t)|_{t=0^-} = s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$$

اما با توجه به آنکه مشتق $\sin \omega t u(t)$ برابر $\omega \cos \omega t u(t)$ است، لذا خواهیم داشت:

^۱ - Euler's Identity

$$\mathcal{L}[\omega \cos \omega t . u(t)] = \frac{s \omega}{s^2 + \omega^2}$$

و در نهایت،

$$\mathcal{L}[\cos \omega t . u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

که می‌بینیم با استفاده از رابطه (۸-۲۰) و خاصیت مشتق‌گیری در تبدیل لاپلاس، توانستیم تبدیل لاپلاس ارائه‌شده در رابطه (۸-۱۹) را به اثبات رسانیم.

- تابع شیب $ktu(t)$

برای اینکه بتوانیم تبدیل لاپلاس تابع شیب^۱ $kt.u(t)$ را به‌دست آوریم از رابطه تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم که،

$$\mathcal{L}[kt.u(t)] = \int_0^{\infty} kt.e^{-st} dt = \frac{k}{s^2} \quad (۸-۲۱)$$

این رابطه تبدیل لاپلاس را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع به‌دست آورد. همچنین انتگرال بالا را می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء نیز حل نمود.

- تابع $\int_0^t f(t)dt$

برای یافتن تبدیل لاپلاس یک تابع انتگرالی $\int_0^t f(t)dt$ از رابطه تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(t)dt\right] dt$$

حال از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌شود تا بتوان انتگرال فوق را به‌دست آورد. بدین منظور فرض کنید که،

$$u = \int_0^t f(t)dt, \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = f(t)dt, \quad v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \left\{ \frac{-1}{s} e^{-st} \int_0^t f(t)dt \right\} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} F(s)$$

که جمله اول در سمت راست معادله به ازای کرانه‌های بالا و پایین، برابر صفر می‌باشد. لذا در نهایت داریم:

^۱ - Ramp Function

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (22-8)$$

حال با استفاده از این رابطه و با در نظر گرفتن آنکه تبدیل لاپلاس تابع $u(t)$ برابر $\frac{1}{s}$ است، لذا رابطه (۲۱-۸) را می‌توان به راحتی با استفاده از رابطه (۲۲-۸) به دست آورد. پس مشتق‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را در s ضرب کنیم و بر عکس، انتگرال‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را به s تقسیم کنیم.

- تابع $e^{-at} f(t)$

با فرض آنکه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at} f(t)$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+a)t} dt$$

رابطه اخیر شبیه به رابطه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است؛ با این تفاوت که به جای اپراتور s ، عملگر $s+a$ جایگزین شده است. پس،

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (23-8)$$

یعنی اگر تابع $f(t)$ در جمله e^{-at} ضرب شود، تبدیل لاپلاس تابع حاصل، برابر انتقال یافته تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به اندازه a (یعنی $F(s+a)$) است.

در نتیجه، با استفاده از این خاصیت، به راحتی می‌توان رابطه (۱۶-۸) را به دست آورد؛ یعنی با توجه به آنکه $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ می‌باشد، لذا،

$$\mathcal{L}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{s+a}$$

- انتقال زمان یک تابع

تاکنون در مورد تبدیل لاپلاس توابع زمانی بحث کردیم که از لحظه $t=0$ شروع می‌شوند. حال می‌خواهیم ببینیم اگر تابعی از زمان $t=a$ آغاز شود، تبدیل لاپلاس تابع مذکور، چه تغییری می‌کند. بدین منظور فرض کنید که $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ باشد. حال می‌خواهیم ببینیم تبدیل لاپلاس $f(t-a)u(t-a)$ (با $a > 0$) چگونه است؟ به عبارت دیگر، چه ارتباطی با $F(s)$ دارد. بدین منظور از تابع $f(t-a)u(t-a)$ به شکل زیر، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st} dt$$

حال اگر تغییر متغیر $\tau = t - a$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s)$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (24-8)$$

پس نتیجه می‌گیریم که اگر یک تابع زمانی $f(t)$ به مقدار a ثانیه، تأخیر یابد، آنگاه تابع لاپلاس $F(s)$ آن در جمله e^{-as} ضرب می‌شود. مثلاً تبدیل لاپلاس تابع $u(t-4)$ برابر $\frac{1}{s} e^{-4s}$ می‌باشد.

- توابع متناوب $f(t)$

فرض کنید که یک تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T وجود دارد که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس آن را به دست آوریم. شکل کلی یک تابع متناوب را می‌توان در شکل (۴-۸) مشاهده نمود. حال اگر تابع موردنظر در دوره تناوب اول را به صورت $f_1(t)$ بیان کنیم، آنگاه تابع $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

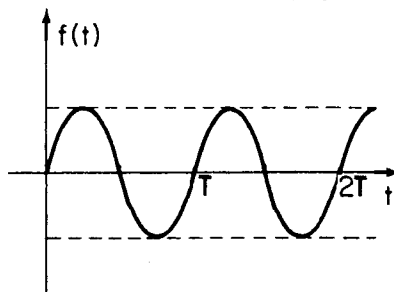
$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) + f_1(t-2T)u(t-2T) + \dots \quad (25-8)$$

که $f_1(t)$ تابع در سیکل اول، $f_1(t-T)u(t-T)$ تابع در سیکل دوم و می‌باشد. حال با استفاده از رابطه (۲۴-۸) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در رابطه (۲۵-۸) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(s) [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots]$$

با توجه به آنکه جملات داخل کروشه، بسط تابع $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}} \quad (26-8)$$



شکل (۴-۸): شکل موج یک تابع متناوب

- مشتق‌گیری از تابع لاپلاس $F(s)$

در این قسمت می‌خواهیم بدانیم، در صورتی که از تابع $F(s)$ برحسب s مشتق بگیریم، چه تغییری در تابع حوزه زمانی آن یعنی $f(t)$ صورت می‌گیرد. بدین منظور داریم:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [-tf(t)] dt$$

پس نتیجه می‌گیریم که،

$$\mathcal{L}[t.f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (27-8)$$

با استفاده از همین خاصیت مشتق‌گیری از تابع لاپلاس $F(s)$ به راحتی می‌توان اثبات کرد که،

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (28-8)$$

لازم به ذکر است که برای به دست آوردن این رابطه می‌توانیم از رابطه $\mathcal{L}[t.u(t)] = \frac{1}{s^2}$ و معادله (27-8) استفاده کنیم.

- انتگرال‌گیری از تابع $F(s)$

مثل حالت قبل می‌خواهیم بدانیم در صورتی که از تابع $F(s)$ با متغیر s ، انتگرال‌گیری کنیم تابع $f(t)$ آن چه تغییری می‌کند. باز می‌توان اثبات نمود که،

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (29-8)$$

- تبدیل لاپلاس $f(at)$

در صورتی که $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ باشد آنگاه،

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $\tau = at$ داریم:

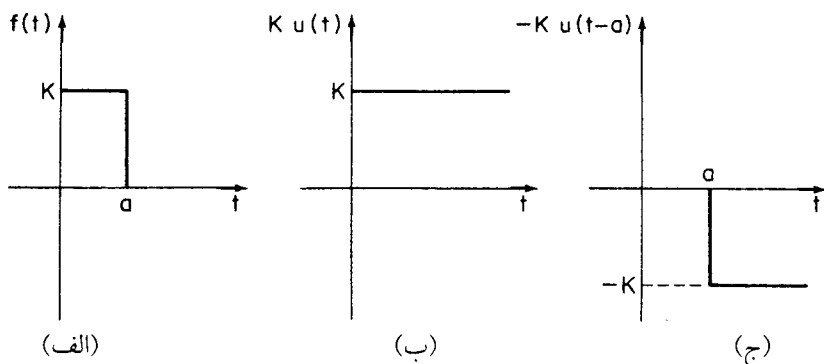
$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (30-8)$$

حال برای درک بهتر این موارد، مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

مثال (8-9): تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را در شکل (8-5-الف) بیابید.



شکل (۵-۸): شکل موج یک تابع پالس

حل: برای این منظور، تابع ارائه شده در شکل (۵-۸-الف) را می توان از مجموع دو تابع ارائه شده در شکل های (۵-۸-ب و ج) به دست آورد. یعنی،

$$f(t) = k[u(t) - u(t-a)]$$

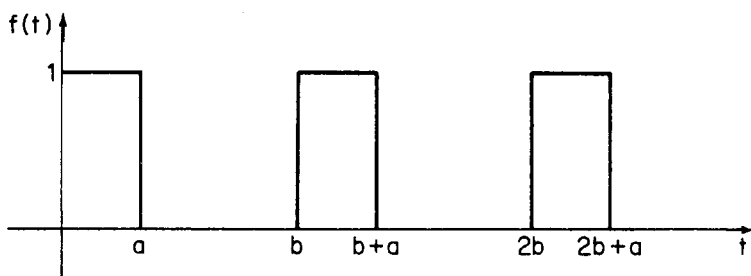
حال با استفاده از تبدیل لاپلاس $u(t)$ و با کمک رابطه (۸-۲۴)، تبدیل لاپلاس تابع فوق به راحتی قابل محاسبه است:

$$\mathcal{L}[k.u(t)] = \frac{k}{s}, \quad \mathcal{L}[-ku(t-a)] = -\frac{k}{s}e^{-as}$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{k}{s}(1 - e^{-as})$$

مثال (۸-۱۰): تابع لاپلاس تابع متناوب ارائه شده در شکل (۸-۶) را بیابید.



شکل (۸-۶): تابع متناوب مربوط به مثال (۸-۱۰)

حل: برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس توابع متناوب از رابطه (۸-۲۶) استفاده می‌کنیم. در مثال قبل، تبدیل لاپلاس تابع $f_1(t)$ که یک تابع پالس است را به دست آوردیم که دامنه آن به مقدار k بود. لذا در این مثال، تبدیل لاپلاس $f_1(t)$ برابر است با:

$$F_1(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s}$$

حال با توجه به آنکه دوره تناوب تابع $f(t)$ در شکل (۸-۶) برابر b می‌باشد، لذا با توجه به رابطه (۸-۲۶) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-bs})}$$

مثال (۸-۱۱): تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\sin \omega_o t \cdot u(t)}{t} u(t)$ را بیابید. حل: قبلاً محاسبه نمودیم که،

$$\mathcal{L}[\sin \omega_o t \cdot u(t)] = \frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$$

حال با استفاده از رابطه (۸-۲۹) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega_o t \cdot u(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} \frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2} ds = \tan^{-1} \frac{s}{\omega_o} \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega_o}$$

مثال (۸-۱۲): تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \cos 10 \cdot \pi \cdot t \cdot u(t)$ را بیابید. حل: قبلاً محاسبه نمودیم که،

$$\mathcal{L}[\cos t \cdot u(t)] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

حال با استفاده از رابطه (۸-۳۰) با فرض آنکه $a = 10 \cdot \pi$ می‌باشد، داریم:

$$\mathcal{L}[\cos 10 \cdot \pi \cdot t \cdot u(t)] = \frac{1}{10 \cdot \pi} \cdot \frac{10 \cdot \pi}{\left(\frac{s}{10 \cdot \pi}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + (10 \cdot \pi)^2}$$

برای جمع بندی مطالب ارائه شده در این بخش، فهرستی از تبدیل لاپلاس بعضی توابع مرسوم در مدارهای الکتریکی در جدول (۸-۱) ارائه شده است. همچنین خواص اساسی ارائه شده در تبدیل لاپلاس را می‌توان در جدول (۸-۲) مشاهده نمود.

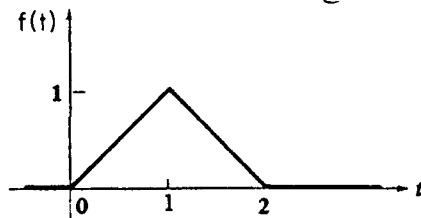
جدول (۸-۱): تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مرسوم

$f(t)$	$F(s)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$K.f(t)$	$K.F(s)$
$\frac{d}{dt} f(t)$	$s.F(s) - f(0^-)$
$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2.F(s) - s.f(0^-) - \frac{df}{dt}(0^-)$
$\frac{d^3}{dt^3} f(t)$	$s^3.F(s) - s^2.f(0^-) - s.\frac{df}{dt}(0^-) - \frac{d^2f}{dt^2}(0^-)$
$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau + g(0^-)$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{g(0^-)}{s}$
$u(t-a)$	$e^{-a.s} / s$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-a.s} F(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s.F(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$

تمرین (۸-۳): تبدیل لاپلاس توابع te^{-at} و $e^{-at} \cos \omega_0 t$ را بیابید.

جواب: بترتیب $\frac{1}{(s+a)^2}$ ، $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

تمرین (۸-۴): تبدیل لاپلاس تابع زمانی ارائه شده در شکل (۸-۷) را بیابید.



شکل (۸-۷): تابع زمانی مربوط به تمرین (۸-۴)

جواب: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$

جدول (۲-۸): خواص اساسی تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	۱
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-a.t} \quad a > 0$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-a.t} \quad a > 0$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cdot \sin \theta + \omega \cdot \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cdot \cos \theta - \omega \cdot \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} \sin \omega t \quad a > 0$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} \cos \omega t \quad a > 0$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} \sin(\omega t + \theta) \quad a > 0$	$\frac{(s+a) \sin \theta + \omega \cdot \cos \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} \cos(\omega t + \theta) \quad a > 0$	$\frac{(s+a) \cos \theta - \omega \cdot \sin \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$ K e^{-a.t} \cos(\omega t + \angle K) \quad a > 0$	$\frac{K}{s+a-j\omega} + \frac{K^*}{s+a+j\omega}$

۸-۵- تبدیل لاپلاس معکوس توابع پیچیده

در بیشتر مسائل مدارهای الکتریکی، تابع‌هایی که تبدیل معکوس آنها پاسخ حوزه زمانی را به دست می‌دهد، اغلب از جفت تبدیل‌های آورده شده در جداول (۸-۱) و (۸-۲) پیچیده‌تر هستند. لذا برای استفاده از خواص این جداول، می‌بایست یک رشته عملیات جبری بر روی $F(s)$ انجام شود تا بتوان تابع زمانی $f(t)$ آن را به دست آورد. روشی که اغلب برای تجزیه هر تابع $F(s)$ به تابع‌هایی ساده به کار می‌رود، تجزیه به کسرهای ساده است.

برای تجزیه توابع گویا به جزءهای ساده، یک روش کلی و عمومی وجود دارد که به گسترش به صورت کسرهای جزئی^۱ معروف است. برای این منظور، تابع گویای $F(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(s) = \frac{C(s)}{B(s)} = \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (۸-۳۱)$$

که $C(s)$ و $B(s)$ چند جمله‌ای‌هایی برحسب متغیر s بوده و ضرایب c_0 تا c_m و b_0 تا b_n اعداد حقیقی می‌باشند. همچنین z_i تعداد صفرهای تابع $F(s)$ می‌باشد که ریشه‌های معادله $C(s)$ می‌باشد و p_j تعداد قطب‌های تابع $F(s)$ است که ریشه‌های معادله $B(s)$ است.

اولین مرحله در گسترش تابع $F(s)$ به صورت کسرهای جزئی، نوشتن این تابع به صورت مناسب^۲ می‌باشد؛ به این معنی که درجه چند جمله‌ای صورت، باید از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچک‌تر باشد. برای این منظور، مناسب است تا با تقسیم صورت بر مخرج، بتوان تابع $F(s)$ را به صورت زیر به شکل مناسب در آورد:

$$F(s) = \frac{C(s)}{B(s)} = g_1 + g_2 s + g_3 s^2 + \dots + g_{k+1} s^k + \frac{A(s)}{B(s)} \quad (۸-۳۲)$$

که فرض شده است درجه صورت به مقدار k از درجه مخرج، بزرگ‌تر است. با این کار، درجه چند جمله‌ای $A(s)$ از درجه چند جمله‌ای $B(s)$ کم‌تر می‌شود. لذا تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۸-۳۲) به شکل زیر به دست می‌آید:

^۱ - Partial Fraction Expansion

^۲ - Proper

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = g_1 \delta(t) + g_2 \delta^{(1)}(t) + \dots + g_{k+1} \delta^{(k)}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] \quad (۳۳-۸)$$

حال کافی است تبدیل لاپلاس معکوس تابع چند جمله‌ای $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به دست آوریم که خاصیت این تابع گویا، آن است که درجه چند جمله‌ای صورت از مخرج، کوچک‌تر است. برای این منظور، تابع $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به صورت کسرهای جزئی در می‌آوریم. در اینجا سه حالت وجود دارد و آن، به این صورت است که قطب‌های چند جمله‌ای $B(s)$ می‌تواند به صورت قطب‌های ساده، قطب‌های مکرر، و یا قطب‌های مختلط باشد که در ادامه به این سه نوع قطب و روش‌های تجزیه هر کدام اشاره می‌شود.

حالت اول: قطب‌های ساده:

در صورتی که ریشه‌های معادله $B(s)$ به صورت ساده و غیر تکراری باشد، آنگاه تابع $\frac{A(s)}{B(s)}$ را می‌توان به شکل ساده زیر و به صورت کسرهای جزئی تقسیم بندی نمود:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s-p_i} \quad (۳۴-۸)$$

که ضرایب k_1 تا k_n را می‌توان با مخرج مشترک چند جمله‌ای‌های سمت راست و معادل قرار دادن صورت توابع سمت چپ و راست به دست آورد. آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس هر جمله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} \quad (۳۵-۸)$$

مثال (۸-۱۳): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

حل: می‌دانیم که قطب‌های تابع $F_1(s)$ برابر $p_1 = -1$ و $p_2 = -2$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} = \frac{k_1(s+2) + k_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

با تساوی قرار دادن چند جمله‌ای صورت معادله اخیر، با صورت تابع $F_1(s)$ داریم:

$$3s+5 = k_1(s+2) + k_2(s+1)$$

یعنی،

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ 2k_1 + k_2 = 5 \end{cases}$$

در نتیجه، $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس $F_1(s)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

در این مثال ساده، روش تجزیه کسرهای نشان داده شده است ولی اگر تعداد قطب‌های چند جمله‌ای مخرج، زیاد باشد، دیگر این روش کارساز نیست. راه ساده و مناسبی که برای به دست آوردن ضرایب k_i در رابطه (۳۴-۸) وجود دارد این است که از رابطه زیر استفاده شود:

$$k_i = (s - p_i)F_1(s) \Big|_{s=p_i} \quad (36-8)$$

مثال (۸-۱۴): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F_1(s) = \frac{6s^2 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6s^2 + 25s + 23}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرهای داریم:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

حال با استفاده از رابطه (۳۶-۸) می‌توان نوشت:

$$k_1 = (s+1) \frac{6s^2 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = 3, \quad k_3 = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

و با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از جملات سمت راست رابطه اخیر، تابع زمانی آن محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = [2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t}]u(t)$$

حالت دوم: قطب‌های مکرر

فرض کنید که تابع $F_1(s)$ دارای یک قطب تکراری p_0 با رتبه n و m قطب مجزای دیگر باشد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{(s-p_o)^n \prod_{i=1}^m (s-p_i)} \quad (37-8)$$

حال اگر بخواهیم این تابع را بر حسب کسرهای جزئی بیان کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{k_{o1}}{(s-p_o)} + \frac{k_{o2}}{(s-p_o)^2} + \dots + \frac{k_{on}}{(s-p_o)^n} + \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_m}{s-p_m} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{k_{oi}}{(s-p_o)^i} + \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{(s-p_i)} \end{aligned} \quad (38-8)$$

که تبدیل لاپلاس تک تک جملات سمت راست رابطه اخیر برابر است با:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = k_{o1}e^{p_o t} + k_{o2}te^{p_o t} + \dots + \frac{k_{on}t^{n-1}e^{p_o t}}{(n-1)!} + k_1e^{p_1 t} + \dots + k_me^{p_m t} \\ &= e^{p_o t} \sum_{i=1}^n \frac{k_{oi}t^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^m k_i e^{p_i t} \end{aligned} \quad (39-8)$$

حال برای محاسبه k_i از همان رابطه (۳۶-۸) استفاده می‌شود ولی برای محاسبه ضرایب k_{oi} با استفاده از خواص مشتق‌گیری از تابع لاپلاس از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} k_{o,n} &= \frac{1}{o!} (s-p_o)^n F_1(s) \Big|_{s=p_o} \\ k_{o,n-1} &= \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s-p_o)^n F_1(s)] \Big|_{s=p_o} \\ k_{o,n-i} &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} [(s-p_o)^n F_1(s)] \Big|_{s=p_o} \end{aligned} \quad (40-8)$$

مثال (۸-۱۵): تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F_1(s)$ زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{4s^2 + 11s + 9}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{4s^2 + 11s + 9}{(s+1)^2(s+2)}$$

حل: مشخص است که چند جمله‌ای مخرج، دارای یک ریشه $p_0 = -1$ از مرتبه ۲ و یک ریشه $p_1 = -2$ از مرتبه اول است. پس،

$$F_1(s) = \frac{k_{01}}{s+1} + \frac{k_{02}}{(s+1)^2} + \frac{k_1}{s+2}$$

حال برای به دست آوردن هر یک از ضرایب، با استفاده از روابط (۸-۳۶) و (۸-۴۰) آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$k_1 = (s+2) \cdot \frac{4s^2 + 11s + 9}{(s+1)^2(s+2)} \Big|_{s=-2} = 3$$

$$k_{01} = (s+1)^2 F_1(s) \Big|_{s=-1} = \frac{4s^2 + 11s + 9}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_{02} = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 F_1(s) \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{4s^2 + 11s + 9}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+2}$$

و در نهایت، تابع زمانی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = [e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

حالت سوم: قطب‌های مختلط

در صورتی که قطب‌های مختلط در چند جمله‌ای مخرج $F_1(s)$ موجود باشد می‌توان از روش ارائه شده در حالت دوم نیز استفاده نمود؛ ولی با توجه به خاصیت قطب‌های مختلف، امکان ساده سازی کسرهای جزیی مربوط به قطب‌های مختلط، بیشتر می‌باشد. برای این منظور، فرض کنید که چند جمله‌ای مخرج $F_1(s)$ دارای یک قطب مختلط p_0 و p_0^* باشد (علامت * به معنای مزدوج p_0 است). آنگاه می‌توان نوشت:

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{(s-p_0)(s-p_0^*)Q(s)} \quad (۸-۴۱)$$

که با روش تجزیه کسرها، رابطه اخیر را می‌توان به رابطه زیر تبدیل نمود:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{(s-p_0)} + \frac{k_2}{(s-p_0^*)} + \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (۸-۴۲)$$

که $\frac{R(s)}{Q(s)}$ تابع تجزیه کسرهای دیگر قطب‌های تابع $F_1(s)$ است. حال با استفاده از رابطه (۳۶-۸) مقادیر k_1 و k_2 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} k_1 &= (s - p_o) F_1(s) \Big|_{s=p_o} \\ k_2 &= (s - p_o^*) F_1(s) \Big|_{s=p_o^*} \end{aligned} \quad (۴۳-۸)$$

از روابط (۴۳-۸) در می‌یابیم که k_2 مزدوج مختلط k_1 است یعنی،

$$k_2 = k_1^* = k_r - jk_i, \quad p_o^* = \sigma_o - j\omega_o$$

لذا دو جمله اول کسرهای جزئی ارائه شده در سمت راست رابطه (۴۲-۸) را می‌توان با یکدیگر ترکیب نموده و رابطه مذکور را به شکل زیر خلاصه نمود:

$$F_1(s) = \frac{2k_r s - 2k_r \sigma_o - 2k_i \omega_o}{(s - \sigma_o)^2 + \omega_o^2} + \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (۴۴-۸)$$

مثال (۸-۱۶): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{[(s+2)^2 + 4](s+1)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرهای داریم:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s - (-2 + j2)} + \frac{k_1^*}{s - (-2 - j2)} + \frac{k_2}{s + 1}$$

حال با بکار بردن روابط (۴۳-۸) می‌توان نوشت:

$$k_1 = (s + 2 - j2) F(s) \Big|_{s=-2+j2} = \frac{s^2 + 3s + 7}{(s + 2 + j2)(s + 1)} \Big|_{s=-2+j2} = \frac{1}{4} j = \frac{1}{4} e^{j90^\circ}$$

$$k_2 = (s + 1) F_1(s) \Big|_{s=-1} = 1$$

در نتیجه، با استفاده از رابطه (۴۴-۸) خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{-2 \times \frac{1}{4} \times 2}{(s+2)^2 + 4} + \frac{1}{(s+1)}$$

در نهایت، تابع زمانی $f_1(t)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f_1(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} \sin 2t + e^{-t} \quad t \geq 0 \quad \text{برای}$$

تمرین (۸-۵): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{4s^2 + 7s + 13}{(s^2 + 2s + 5)(s+2)}$$

جواب: $f_1(t) = [e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t + 3e^{-2t}]u(t)$

۸-۶- کاربردهای اولیه از تبدیل لاپلاس

در این بخش، برآنیم تا کاربردهای اولیه‌ای از تبدیل لاپلاس را بیان نماییم. در فصل‌های آینده، کاربردهای اساسی دیگری از تبدیل لاپلاس را ارائه می‌کنیم.

۸-۶-۱- مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس

برای یک سلف با اندوکتانس L و جریان اولیه $i(o^-)$ ، رابطه زیر، بین ولتاژ با جریان آن در حوزه زمان برقرار است:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt + i_L(o^-)$$

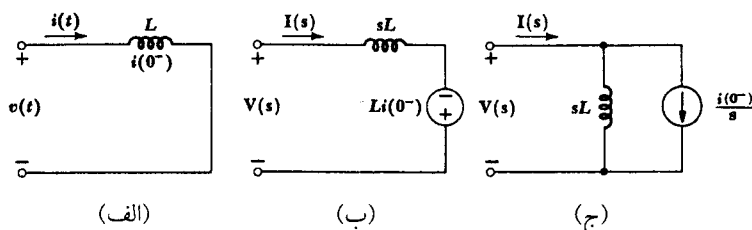
حال اگر این رابطه را به حوزه فرکانس انتقال نماییم (تبدیل لاپلاس بگیریم)، خواهیم داشت:

$$V_L(s) = sL.I(s) - Li(o^-) \quad (۴۵-۸)$$

و یا،

$$I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(o^-)}{s} \quad (۴۶-۸)$$

رابطه (۴۵-۸) به هنگام کاربرد قانون KVL و رابطه (۴۶-۸) به هنگام کاربرد قانون KCL قابل استفاده می‌باشد. شکل (۸-۸) مدل یک سلف را در حوزه زمان و فرکانس نشان می‌دهد.



شکل (۸-۸): مدل یک سلف القایی در: (الف) حوزه زمان؛ (ب و ج) حوزه فرکانس

همین موضوع را می‌توان برای یک خازن با ظرفیت خازنی C و ولتاژ اولیه $v(o^-)$ ارائه داد. رابطه ولتاژ-جریان هر خازن در حوزه زمان برابر است با:

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt + v_C(o^-)$$

حال با انتقال رابطه اخیر به حوزه فرکانس می‌توان نوشت:

$$I(s) = Cs.V(s) - Cv(o^-) \quad (۴۷-۸)$$

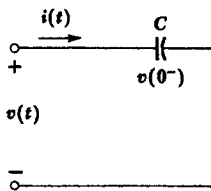
و یا،

$$V(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v(o^-)}{s} \quad (۴۸-۸)$$

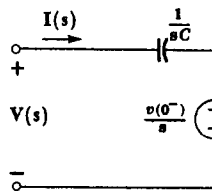
دو معادله (۴۷-۸) و (۴۸-۸) بترتیب برای کاربرد در قوانین KCL و KVL مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل (۹-۸) مدل یک خازن در حوزه زمان و فرکانس آورده شده است. همچنین از روابط (۴۵-۸) و (۴۸-۸) در می‌یابیم که اگر ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف، برابر صفر باشند آنگاه امپدانس سلف و خازن در حوزه فرکانس به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_L(s) = sL$$

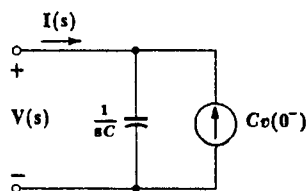
$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (۴۹-۸)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۹-۸): مدل یک خازن در: (الف) حوزه زمان؛ (ب و ج) حوزه فرکانس

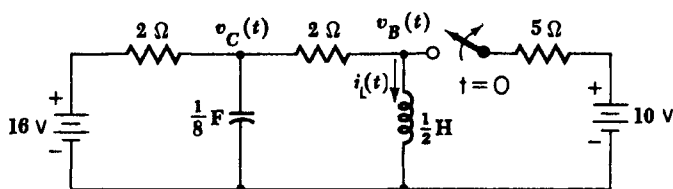
۸-۶-۲- پاسخ حالت کامل مدارهای الکتریکی

حل مسائل مدارهای الکتریکی به روش تبدیل لاپلاس، در واقع، تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را انجام می‌دهد. در این روش، معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند که بالطبع، حل آنان بسیار ساده‌تر خواهد بود. بعلاوه، روش تبدیل لاپلاس نسبت به روش حوزه زمانی، دارای دو مزیت دیگر است: اول آنکه در روش تبدیل لاپلاس، پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر به‌صورت یک جا و در عین حال، متمایز به‌دست می‌آیند. دوم آنکه در روش تبدیل لاپلاس، شرایط اولیه در حل

مسئله به طور مستقیم وارد می شود. لذا در این روش، مشتق های مرتبه بالا در حل مسئله وجود ندارد.

در حل مدارهای الکتریکی خطی با استفاده از تبدیل لاپلاس، دو روش جداگانه وجود دارد. در روش اول، معادلات دیفرانسیل مدار نوشته شده و سپس تک تک جملات را با استفاده از تبدیل لاپلاس به حوزه فرکانس منتقل می کنیم. در این روش، به طور خودکار، جملاتی به وجود می آید که شرایط اولیه مدار در آنها وجود دارد. در این حالت، پس از جایگزینی شرایط اولیه، خروجی تبدیل شده برحسب متغیر s به دست می آید و سپس با تبدیل معکوس، پاسخ در حوزه زمان تعیین می شود. در روش دوم با استفاده از روش ارائه شده در بخش (۸-۶-۱)، مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس در مدار جایگزین می شوند و سپس معادلات مدار را براساس قوانین KVL یا KCL می نویسیم. در این روش، چون در مدار معادل سلف و خازن، شرایط اولیه وارد می شود، لذا می توان به راحتی مسئله را با وجود شرایط اولیه سلف ها و خازن ها حل نمود.

مثال (۸-۱۷): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۱۰) فرض می شود که در لحظه $t=0$ ، کلید مدار، باز می شود. ولتاژ دو سر خازن $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۸-۱۰): مدار الکتریکی موردنظر برای مثال (۸-۱۷)

حل: این مدار را از دو روش موردنظر حل می کنیم.

روش اول: ابتدا براساس روش KCL، پس از باز شدن کلید مدار، معادلات در حوزه زمان را می نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[v_C(t) - 16] + \frac{1}{8} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{2}[v_C(t) - v_B(t)] = 0 \\ \frac{1}{2}[v_B(t) - v_C(t)] + 2 \int v_B(t) dt = 0 \end{cases}$$

حال دو معادله اخیر را به حوزه فرکانس منتقل می کنیم. لذا با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}V_C(s) - \frac{\Lambda}{s} + \frac{1}{\Lambda}[sV_C(s) - v_C(o^-)] + \frac{1}{2}[V_C(s) - V_B(s)] = 0 \\ \frac{1}{2}[V_B(s) - V_C(s)] + 2\frac{V_B(s)}{s} + \frac{i_L(o^-)}{s} = 0 \end{cases}$$

برای به دست آوردن شرایط اولیه سلف و خازن در مدار شکل (۸-۱۰) می‌دانیم که پس از گذشت زمان طولانی، سلف به صورت اتصال کوتاه و خازن به صورت مدار باز در می‌آید. لذا،

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) = \frac{16}{4} + \frac{10}{5} = 6A$$

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) = \frac{16}{4} \times 2 = 8V$$

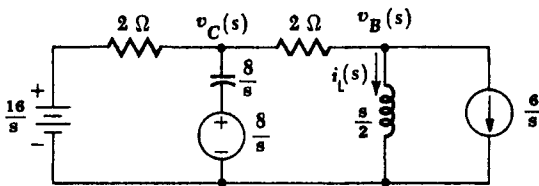
همچنین با جایگزینی مقادیر $i_L(o^-)$ و $v_C(o^-)$ و حذف $V_B(s)$ از دسته معادلات فوق خواهیم داشت:

$$V_C(s) = \frac{\Lambda(s^2 + 6s + 32)}{s(s^2 + 8s + 32)}$$

اکنون با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = 8 - 4e^{-4t} \sin 4t \quad t > 0$$

روش دوم: در این روش، ابتدا مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۱۰) را در حوزه فرکانس رسم می‌کنیم که این مدار در شکل (۸-۱۱) رسم شده است.



شکل (۸-۱۱): مدار الکتریکی شکل (۸-۱۰) در حوزه فرکانس (پس از باز شدن کلید)

حال معادلات KCL را برای دو گره مدار شکل (۸-۱۱) می‌نویسیم که خواهیم داشت:

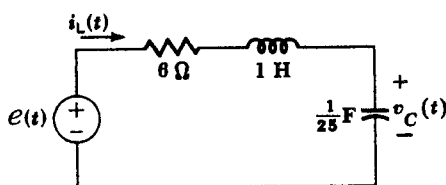
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[V_C(s) - \frac{16}{s}\right] + \frac{s}{\Lambda}\left[V_C(s) - \frac{\Lambda}{s}\right] + \frac{1}{2}[V_C(s) - V_B(s)] = 0 \\ \frac{v_B(s)}{s/2} + \frac{6}{s} + \frac{1}{2}[V_B(s) - V_C(s)] = 0 \end{cases}$$

در نتیجه با حذف متغیر $V_B(s)$ ، متغیر $V_C(s)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$V_C(s) = \frac{\lambda(s^2 + 6s + 32)}{s(s^2 + 8s + 32)}$$

که مشابه معادلات در روش اول است.

مثال (۸-۱۸): در مدار شکل (۸-۱۲) با فرض $v_C(o^-) = 1V$ و $i_L(o^-) = 5A$ ، و ورودی $e(t) = 12\sin 5t$ ، جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۸-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۸-۱۸)

حل: معادله دیفرانسیل مدار موردنظر به صورت زیر به دست می آید:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(t) dt + v_C(o^-) = e(t)$$

حال اگر از رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس گرفته و مقادیر ارائه شده در مثال را جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{L}{s}(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})I(s) = E(s) + Li_L(o^-) - \frac{v_C(o^-)}{s}$$

$$I(s) = \frac{s}{(s+3)^2 + 4^2} E(s) + \frac{5s-1}{(s+3)^2 + 4^2}$$

که جمله اول در سمت راست معادله اخیر، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، و جمله دوم، بیانگر تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است. حال با توجه به آنکه،

$$E(s) = \mathcal{L}[12\sin 5t] = \frac{60}{s^2 + 5^2}$$

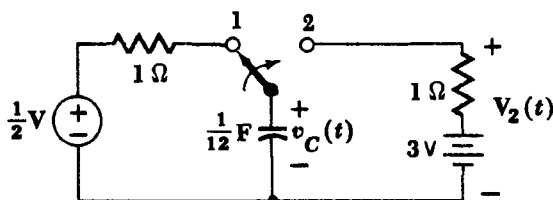
است، لذا خواهیم داشت:

$$I(s) = \frac{s}{[(s+3)^2 + 4^2] \cdot (s^2 + 5^2)} + \frac{5s-1}{(s+3)^2 + 4^2}$$

اکنون با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس برای رابطه اخیر می توان نوشت:

$$i(t) = 5e^{-3t} \cos 4t - 6/5 e^{-3t} \sin 4t + 2\sin 5t \quad t \geq 0$$

تمرین (۶-۸): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۳-۸) فرض می شود که کلید مدار به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و به طور ناگهانی و در زمان $t=0$ ، در وضعیت ۲ قرار می گیرد. ولتاژ $v_o(t)$ را برای زمان $t \geq 0$ محاسبه نمایید.



شکل (۱۳-۸): مدار مربوط به مثال (۶-۸)

جواب: $v_o(0^+) = \frac{1}{4} \text{ V}$, $v_o(t) = 3 - \frac{5}{4} e^{-12t}$

۷-۸- خلاصه و نتیجه گیری

هدف از ارائه این فصل آن بود که با بیان روش تبدیل لاپلاس و مشخص نمودن خصوصیات کاربردی آن، ابزار مفیدی برای حل مدارهای الکتریکی در اختیار خوانندگان گذاشته شود. خلاصه این مطالب را می توان به صورت زیر اشاره نمود:

- خواص اساسی تبدیل لاپلاس و ارائه تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مهم در جداول (۱-۸) و (۲-۸) ارائه شده است. با استفاده از روابط مشخص شده در جداول، می توان توابع زمانی پیچیده ای را به حوزه فرکانس منتقل نموده و یا بالعکس، تبدیل لاپلاس معکوس انجام داد.

- با استفاده از ابزار تبدیل لاپلاس، به راحتی می توان پاسخ حالت صفر، پاسخ ورودی صفر و پاسخ کامل یک مدار الکتریکی را به طور مستقیم محاسبه نمود. البته در محاسبه پاسخ کامل یک مدار، روند حل مسئله با استفاده از تبدیل لاپلاس به گونه ای است که مستقیماً می توان به این پاسخ دسترسی پیدا کرد. به عبارت دیگر، در یک حل مستقیم، پاسخ حالت صفر و ورودی صفر بطور یکجا محاسبه می شود.

- به منظور تعیین تابع زمانی یک تابع در حوزه فرکانس، می توان از روش تجزیه به کسرهای جزئی استفاده نمود که حالت های مختلف آن در بخش (۵-۸) آورده شده است.

- یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس، مدل سازی سلف و خازن در حوزه فرکانس و حل مدارهای الکتریکی است که به طور ابتدایی و مقدماتی، این مبحث در بخش (۶-۸)

آورده شده است. در فصل‌های آتی، کاربردهای مفصل‌تری از تبدیل لاپلاس آورده شده است.

۸-۸- مسائل مروری

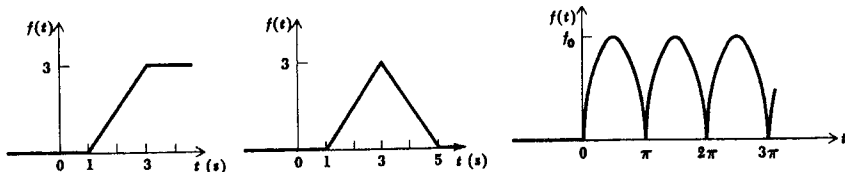
۱- تبدیل لاپلاس توابع زمانی زیر را بیابید.

$$f(t) = 2e^{\sin t} \delta(t) \quad f(t) = 5u(t-5)$$

$$f(t) = \sin^3 t \cdot u(t) \quad f(t) = t \cdot u(t-2)$$

$$f(t) = t^3 2e^{-2t} u(t)$$

۲- تبدیل لاپلاس توابع نشان داده در شکل (۸-۱۴) را بیابید.



شکل (۸-۱۴): توابع زمانی مربوط به سؤال (۲)

۳- تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید:

$$F(s) = \frac{10s^2}{s^2 + 5s + 4}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{3s^3 + 2s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

$$F(s) = \frac{e^{-3s-3}}{s+1}$$

$$F(s) = \frac{s^4 + 1}{(s+1)^3}$$

۴- با توجه به آنکه $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ و $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ می‌باشد، آنگاه تبدیل

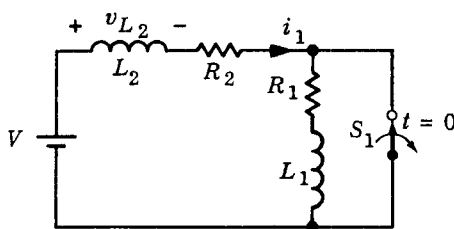
لاپلاس توابع $\sinh at$ و $\cosh at$ را بیابید.

۵- مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۸-۱۵) مفروض است. فرض کنید که کلید S_1

به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ ، کلید باز می‌شود. حال اگر $V=2V$ ،

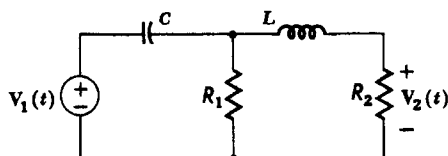
$R_1 = R_2 = 15\Omega$ ، $L_1 = L_2 = 1H$ باشد آنگاه $i_1(t)$ و $v_{L2}(t)$ را با استفاده از روش تبدیل

لاپلاس بیابید.



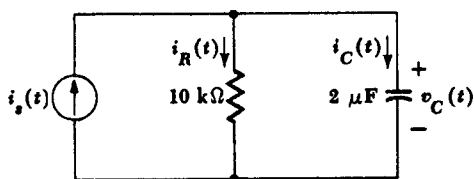
شکل (۸-۱۵): مدار مربوط به سؤال (۵)

۶- در مدار ارائه شده در شکل (۸-۱۶) پاسخ ورودی پله را برای $v_2(t)$ در حالتی که $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ، و $L = 1H$ و $C = 1F$ باشد، بیابید.



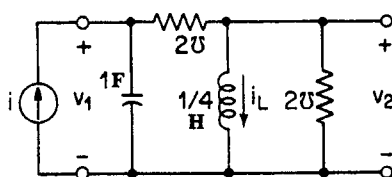
شکل (۸-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

۷- در مدار ارائه شده در شکل (۸-۱۷) پاسخ ورودی ضربه واحد را برای $v_C(t)$ ، $i(t)$ ، و $i_R(t)$ بیابید.



شکل (۸-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

۸- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۱۸)، در صورتی که ورودی $i(t)$ به مقدار $i(t) = 2e^{-t}u(t)$ آمپر باشد، آنگاه با استفاده از تبدیل لاپلاس، ولتاژ $v_2(t)$ را بیابید. فرض کنید که تمام شرایط اولیه، صفر است.

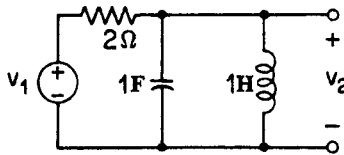


شکل (۸-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- در مدار ارائه در شکل (۸-۱۹)، در صورتی که ورودی $v_1(t)$ در حالت‌های مختلف زیر باشد، مقدار $v_2(t)$ را بیابید. فرض کنید که شرایط اولیه مدار به مقدار صفر است.

الف) $v_1(t) = \sin t \cdot u(t)$

ب) $v_1(t) = \sin 2t \cdot u(t)$



شکل (۸-۱۹): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- سؤال (۹) را با وجود شرایط اولیه $i_L(0^-) = 2A$ و $v_C(0^-) = 1V$ دوباره حل کنید.

فصل نهم

توابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی

۹-۱- مقدمه

یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس در یافتن تابع شبکه و فرکانسهای طبیعی یک شبکه می‌باشد. بدین منظور، در این فصل ابتدا تابع شبکه و خصوصیات آن مورد بررسی قرار می‌گیرد که با استفاده از تبدیل لاپلاس، روش‌های مختلف تعیین تابع شبکه را بیان می‌کنیم و خواص آن را ارائه می‌دهیم. همچنین نحوه تعیین قطب‌ها و صفرهای تابع شبکه را مشخص می‌کنیم و ارتباط آنها را با یکدیگر بیان می‌کنیم. در قسمت دوم این فصل، مفهوم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه و فرکانس‌های طبیعی شبکه الکتریکی را مشخص نموده و ارتباط آن را با توابع شبکه بیان می‌کنیم. البته فرکانس‌های طبیعی در شرایط ورودی صفر تعریف می‌گردند؛ به عبارت دیگر، منابع وابسته هیچ تأثیری در فرکانس‌های طبیعی ندارد و تنها ساختار و توپولوژی شبکه در تعیین مقدار فرکانس‌های طبیعی، مؤثر می‌باشد. این مفاهیم، برای درک رفتار و عملکرد شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان اهمیت فراوانی دارد.

۹-۲- تابع شبکه، امپدانس و ادمیتانس شبکه

عملکرد سیستم‌ها ایجاب می‌کند که پاسخ مدارهای الکتریکی را به ورودی‌های مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. بدین منظور استفاده از تبدیل لاپلاس و انتقال سیستم از حوزه زمان به حوزه فرکانس، برای تعیین مشخصات پاسخ سیستم‌ها به هر تحریک خاصی

بسیار مفید است. ایزاری که ما را در رسیدن به هدف مذکور یاری می‌دهد، تابع شبکه^۱ می‌باشد. تابع شبکه که به تابع سیستم هم معروف است، به صورت نسبت پاسخ خروجی، به تحریک ورودی در حوزه فرکانس تعریف می‌شود. از نظر ریاضی، اگر $Y(s)$ و $X(s)$ بترتیب تبدیل لاپلاس پاسخ (خروجی) $y(t)$ و ورودی (تحریک) $x(t)$ باشد، آنگاه تابع شبکه به صورت زیر ارائه می‌گردد:

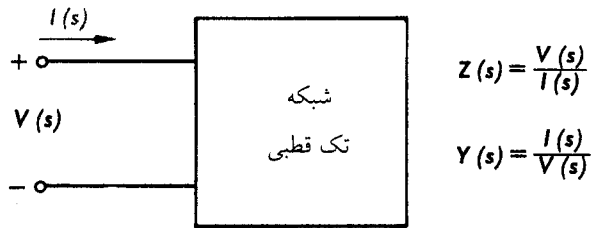
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (۱-۹)$$

البته رابطه مذکور بر پایه نبود شرایط اولیه در مدار می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سیستم تا پیش از اعمال تحریک ورودی، در حالت غیرفعال است. شکل دیگر بیان رابطه (۱-۹) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\mathcal{L}[\text{ورودی یا تحریک}]} \quad (۲-۹)$$

برای بیان توابع شبکه، روش‌های متعددی وجود دارد. یک حالت خاص از رابطه (۲-۹) آن است که $H(s)$ ، بیانگر رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم بدون وجود حالت اولیه برای متغیرها باشد. به عبارت دیگر، $H(s)$ می‌تواند برای بیان یک پاسخ ولتاژی به یک تحریک ورودی جریانی یا ولتاژی تعریف شود. همچنین یک پاسخ جریانی به یک تحریک ورودی جریانی یا ولتاژی نیز می‌تواند تعریف دیگری از تابع شبکه باشد. به عنوان مثال، امپدانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی را می‌توان به صورت نسبت فازوری ولتاژ خروجی حالت دائمی (بدون اثر شرایط اولیه سیستم) به فازور نمایشگر جریان ورودی سینوسی تعریف نمود. این تعریف امپدانس به عنوان یک تعریف خاص از تابع شبکه است. پس به طور خلاصه می‌توان گفت که تابع امپدانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی، به صورت نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ ولتاژ حالت صفر به تبدیل لاپلاس جریان تحریک کننده بیان می‌شود. در نتیجه، امپدانس‌های نقطه تحریک یک مقاومت، سلف و خازن بترتیب برابر R ، sL ، و $1/sC$ می‌باشد. همچنین تابع ادmittانس نقطه تحریک یک سیستم تک قطبی را می‌توان به صورت تبدیل لاپلاس پاسخ جریان حالت صفر به تبدیل لاپلاس ولتاژ ورودی تعریف کرد. لذا ادmittانس‌های نقطه تحریک یک مقاومت، سلف و خازن، بترتیب برابر $1/R$ ، $1/sL$ ، و sC می‌باشد. در شکل (۱-۹) تابع شبکه امپدانس و ادmittانس تعریف شده است که برای هر شبکه در حالت دائمی سینوسی با هر مجموعه از عناصر سلف، خازن و مقاومت که به شکل‌های سری و موازی قرار گرفته باشند، صادق است.

^۱- Network Function



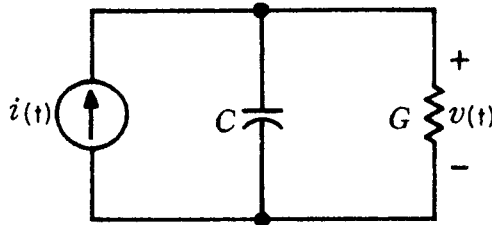
شکل (۱-۹): نمایش تابع شبکه امپدانس و ادمیتانس

مثال (۱-۹): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۹)، با فرض آنکه منبع ورودی $i(t)$ باشد و ولتاژ و ولتاژ $v(t)$ پاسخ حالت صفر باشد، آنگاه تابع امپدانس نقطه تحریک را بیابید. حل: با توجه به موازی بودن R و C و انتقال تمام عناصر به حوزه لاپلاس خواهیم داشت:

$$V(s) = \frac{1}{G + sC} \cdot I(s)$$

که $G = 1/R$ و $Y_C = sC$ می‌باشد. حال تابع امپدانس نقطه تحریک برابر است با:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{G + sC}$$



شکل (۲-۹): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱-۹)

مثال (۲-۹): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۹-الف) که در حوزه زمان رسم شده است، تابع ادمیتانس نقطه تحریک را در حوزه فرکانس بیابید. حل: برای رسیدن به تابع ادمیتانس، ابتدا مدار موردنظر را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم که در شکل (۳-۹-ب) نشان داده شده است. سپس با نوشتن معادلات KVL خواهیم داشت:

$$V(s) = (2 + 3s)I_1(s) - 3sI_2(s)$$

$$0 = -3sI_1(s) + \left(4s + \frac{2}{s}\right)I_2(s)$$

که اگر روابط اخیر را به طور ماتریسی بیان کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3s & -3s \\ -3s & 4s+\frac{2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

با استفاده از معکوس گیری از ماتریس انتقال می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{s}{3s^3+8s^2+6s+4} \begin{bmatrix} 4s+\frac{2}{s} & 3s \\ 3s & 2+3s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

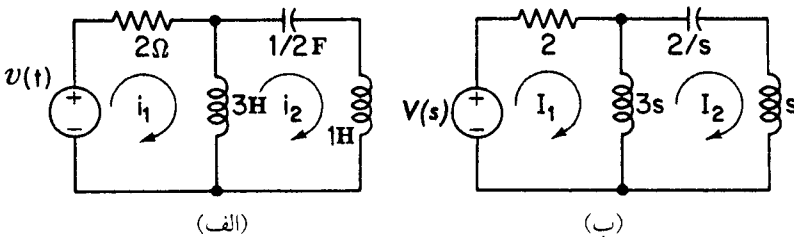
در نتیجه، تابع شبکه بین متغیرهای $I_1(s)$ و $V(s)$ به صورت زیر می باشد:

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{V(s)} = \frac{4s^2+2}{3s^3+8s^2+6s+4}$$

در نهایت، معادله دیفرانسیل در حوزه زمان بین دو متغیر $i_1(t)$ و $v(t)$ به شکل زیر تبدیل می شود:

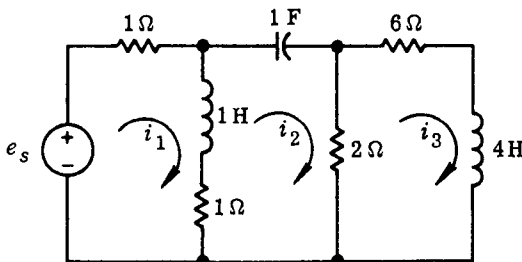
$$4v''(t) + 2v(t) = 3i_1'''(t) + 8i_1''(t) + 6i_1'(t) + 4i_1(t)$$

که علامت پریم به معنای مشتق گیری بر حسب زمان است و تعداد پریم ها به معنای مرتبه مشتق گیری است.



شکل (۹-۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۲)

تمرین (۹-۱): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۹-۴) و با استفاده از معادلات حلقه، امپدانس دیده شده از دو سر منبع را به وسیله تابع شبکه $E(s)/I_1(s)$ بیابید.

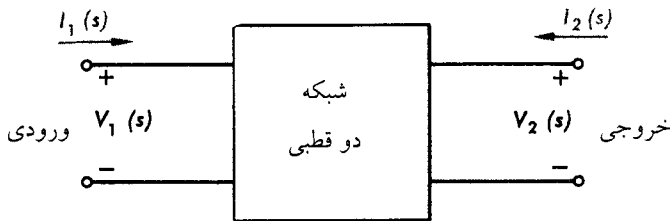


شکل (۹-۴): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۱)

$$\text{جواب: } \frac{E(s)}{I_1(s)} = \frac{3s^2 + 8s + 4}{s^2 + 4s + 2}$$

۹-۳- تابع شبکه به صورت تابع انتقال

معمولاً تابع شبکه به صورت یافتن پاسخ اندازه گیری شده در یک جفت پایانه (به عنوان خروجی) به تحریک اعمال شده در یک جفت پایانه دیگر (به عنوان ورودی) مطرح می گردد. این حالت را می توان در شکل (۹-۵) مشاهده نمود که در این وضعیت، تابع شبکه را تابع انتقال می نامیم. به عنوان مثال، می توان بهره یک تقویت کننده را که به صورت نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به کار می رود، به عنوان یک تابع انتقال در نظر گرفت.



$$\text{توابع شبکه: } \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \quad \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \quad \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \quad \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$

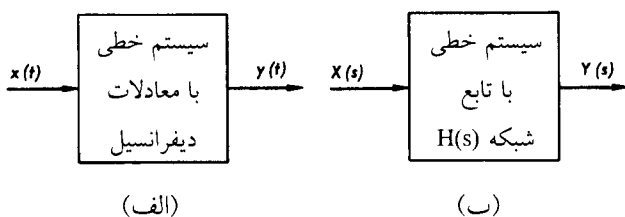
شکل (۹-۵): نمایش توابع انتقال در شبکه

یکی دیگر از کاربردهای تابع شبکه، در تحلیل مدارهای خطی می باشد که در شکل (۹-۶-الف) نشان داده شده است که بیانگر پاسخ $y(t)$ به ازای تحریک ورودی $x(t)$ می باشد. البته همین موضوع را می توان در حوزه فرکانس نیز بیان نمود (شکل (۹-۶-ب) را ببینید). در حوزه زمان، ارتباط بین ورودی $x(t)$ و پاسخ $y(t)$ با یک معادله دیفرانسیل بیان می گردد که شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 x = b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 y \quad (3-9)$$

حال با انتقال این رابطه به حوزه فرکانس، قادریم تا با استفاده از تبدیل لاپلاس، شکل معادله را ساده تر و حل آن را آسان تر کنیم. برای این منظور، با فرض آنکه شرایط اولیه برای متغیرهای سیستم وجود نداشته باشد، آنگاه داریم:

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s) = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) Y(s) \quad (4-9)$$



شکل (۹-۶): نمایش یک سیستم خطی در حوزه زمان و فرکانس

بنابراین، تابع انتقال سیستم برابر است با:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (۵-۹)$$

به عبارت دیگر، با استفاده از تابع شبکه $H(s)$ ، می‌توان پاسخ سیستم را به هر ورودی $X(s)$ به صورت زیر مشخص نمود:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{A(s)}{B(s)} X(s) \quad (۶-۹)$$

به عنوان مثال، برای تحریک (ورودی) به صورت $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ معادله اخیر به شکل زیر در می‌آید:

$$Y(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (۷-۹)$$

که برای به دست آوردن $y(t)$ کافی است که رابطه (۷-۹) را به وسیله تجزیه به کسرهای ساده به حوزه زمان انتقال داد. یعنی،

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^k \frac{k_j}{s - s_j} \quad (۸-۹)$$

که در این رابطه، ریشه‌های s_i (از ۱ تا n) مربوط به ریشه‌های معادله مشخصه $B(s)$ و ریشه‌های s_j (از ۱ تا m) مربوط به ریشه‌های معادله مشخصه $Q(s)$ می‌باشد. در نتیجه،

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + \sum_{j=1}^k k_j e^{s_j t} \quad (۹-۹)$$

که جملات قسمت اول در سمت راست معادله اخیر، متناظر با پاسخ طبیعی سیستم (پاسخ بدون ورودی) است. به عبارت دیگر، این جملات، از تابع سیستم $H(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ ناشی می‌شود و مستقل از تابع تحریک (ورودی) است. همچنین جملات قسمت دوم در سمت راست معادله اخیر، مربوط به پاسخ ورودی است.

مثال (۳-۹): در یک مدار الکتریکی، تابع شبکه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

(الف) در صورتی که ورودی به صورت $x(t) = u(t)$ باشد آنگاه خروجی $y(t)$ را بیابید.

(ب) در صورتی که ورودی به صورت $x(t) = e^{-2t}$ باشد قسمت (الف) را تکرار کنید.

(ج) معادله دیفرانسیلی که بیانگر رابطه بین $x(t)$ و $y(t)$ می‌باشد را به دست آورید.

حل: (الف) با توجه به آنکه $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ می‌باشد آنگاه رابطه (۶-۹) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \cdot \frac{1}{s}$$

حال برای به دست آوردن $y(t)$ از روش تجزیه کسرهای استفاده می‌شود. یعنی،

$$Y(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+4} + \frac{k_3}{s}$$

که ثابت‌های k_1 ، k_2 و k_3 به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k_1 = \left. \frac{2(s+2)}{s(s+4)} \right|_{s=-1} = \frac{-2}{3}$$

$$k_2 = \left. \frac{2(s+2)}{s(s+1)} \right|_{s=-4} = \frac{-1}{3}$$

$$k_3 = \left. \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \right|_{s=0} = +1$$

و در نتیجه، تبدیل معکوس لاپلاس برای محاسبه $y(t)$ برابر است با:

$$y_1(t) = \frac{-2}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} + 1$$

قابل توجه است که مقدار k_3 برابر مقدار تابع شبکه $H(s)$ به ازای مقدار s تحریک (که در این مثال برابر صفر است $s=0$) می‌باشد. دو جمله اول در رابطه اخیر، مربوط به پاسخ ورودی صفر و جمله آخر، در ارتباط با پاسخ حالت صفر می‌باشد که بترتیب از توابع $H(s)$ و $X(s)$ ناشی می‌شوند.

(ب) در صورتی که $x(t) = e^{-2t}$ باشد آنگاه $X(s) = \frac{1}{s+2}$ خواهد بود و در نتیجه،

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \cdot \frac{1}{s+2}$$

با استفاده از روش تجزیه کسرهای داریم:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+4} + \frac{k_3}{s+2}$$

که ضرایب k_1 ، k_2 ، و k_3 را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$k_1 = \left. \frac{2(s+2)}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$k_2 = \left. \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{-2}{3}$$

$$k_3 = \left. \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \right|_{s=-2} = 0$$

بنابراین، با استفاده از ضرایب k_1 تا k_3 و تبدیل لاپلاس معکوس، رابطه $y(t)$ محاسبه می‌شود.

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$$

در این رابطه، خروجی $y(t)$ فقط شامل جملات مربوط به پاسخ ورودی صفر است و پاسخ حالت صفر، برابر صفر می‌باشد؛ زیرا مقدار $k_3 = 0$ می‌باشد. البته مقدار k_3 از رابطه $k_3 = H(s)|_{s=-2}$ حاصل می‌شود که روش حل، مشابه حالت (الف) می‌باشد. علت عدم وجود پاسخ حالت صفر، آن است که جمله $s+2$ از صورت و مخرج تابع خروجی $Y(s)$ حذف می‌شود. پس،

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+4}$$

که با استفاده از رابطه اخیر به همان خروجی $y(t)$ می‌رسیم.

(ج) برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل مربوط به ارتباط ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \cdot X(s)$$

و در نتیجه،

$$(s+1)(s+4) \cdot Y(s) = 2(s+2) \cdot X(s)$$

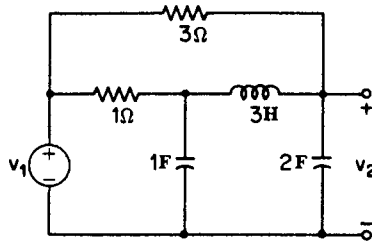
و،

$$(s^2 + 5s + 4) \cdot Y(s) = (2s + 4) \cdot X(s)$$

حال اگر رابطه اخیر را به حوزه زمان انتقال دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 2 \frac{dx}{dt} + 4x$$

تمرین (۲-۹): برای شبکه الکتریکی نشان داده شده در شکل (۷-۹)، ابتدا معادلات دیفرانسیل مدار را در حوزه زمان و سپس در حوزه فرکانس به دست آورده و در نهایت، تابع شبکه $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ را بیابید.



شکل (۷-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۹)

جواب:
$$H(s) = \frac{3s^2 + 3s + 4}{18s^3 + 21s^2 + 12s + 4}$$

۹-۴- قطب‌ها، صفرها و تابع شبکه

در بخش قبل، دیدیم که جملات مربوط به پاسخ حالت صفر و ورودی صفر در خروجی $y(t)$ ، ارتباط نزدیکی با تابع شبکه دارد. برای تشریح بهتر مطالب ارائه شده در بخش اول، باید مفاهیم قطب‌ها و صفرهای تابع $H(s)$ را بیان نماییم. بدین منظور فرض کنید که،

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (9-10)$$

که $A(s)$ و $B(s)$ چند جمله‌ای‌هایی برحسب متغیر s است و a_0 تا a_m و b_0 تا b_n اعداد حقیقی هستند. که هر یک از آنها، مجموعه‌ای از حاصل ضرب‌های مقادیر اجزاء مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها و دیگر عناصر شبکه می‌باشد. حال این رابطه را می‌توان به صورت زیر تجزیه نمود:

$$H(s) = k \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (9-11)$$

در این رابطه، k یک ضریب حقیقی است و z_i ها (برای i از ۱ تا m) صفرهای تابع شبکه و p_j ها (برای j از ۱ تا n) معرف قطبهای تابع شبکه می‌باشند. پس برای محاسبه قطبهای تابع $H(s)$ ، باید جوابهای معادله $B(s) = 0$ را محاسبه نمود (به این قطبها، فرکانسهای طبیعی نیز می‌گوییم که در ادامه در این مورد صحبت می‌کنیم). لذا در صورتی که $B(s) = 0$ باشد، آنگاه تابع $H(s)$ به سمت بینهایت میل می‌کند. به عبارت دیگر، ریشههای معادله $B(s) = 0$ ، تابع شبکه را به سمت بینهایت سوق می‌دهد.

حال اگر در یک سیستم خطی با تابع شبکه $H(s)$ ، ورودی (تحریک) به صورت یک تابع ضربه واحد $\delta(t)$ باشد، آنگاه با توجه به آنکه $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ است لذا خروجی $Y(s)$ برابر $H(s)$ خواهد بود و در نتیجه،

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{j=1}^n k_j e^{p_j t} \quad (۱۲-۹)$$

که در این رابطه، مقادیر p_j ، قطبهای $H(s)$ و ضرایب k_j مربوط به تجزیه به کسرهای ساده تابع $H(s)$ می‌باشد. لذا در می‌یابیم که $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ بیانگر پاسخ ورودی صفر سیستم می‌باشد.

همچنین برای تعیین صفرهای تابع شبکه $H(s)$ ، کافی است که ریشههای چند جمله‌ای معادله $A(s) = 0$ را محاسبه نمود. معنی فیزیکی هر صفر، بیانگر فرکانس مختلطی از تحریک (ورودی) است که به‌ازای آن، پاسخ حالت صفر، برابر صفر می‌گردد. این موضوع را می‌توان در قسمت (ب) از مثال (۹-۳) مشاهده نمود.

برای درک بهتر مفاهیم قطبها و صفرها، فرض کنید که تحریکی به صورت $A_0 e^{s_0 t}$ به سیستم اعمال گردد که این ورودی، دارای هر دو مولفه AC و DC است. در نتیجه، پاسخ سیستم در حوزه فرکانس برابر است با:

$$Y(s) = H(s) \frac{A_0}{s - s_0} \quad (۱۳-۹)$$

حال اگر تابع $Y(s)$ را به کسرهای ساده‌ای تجزیه کنیم داریم:

$$Y(s) = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{s - p_j} + \frac{k_0}{s - s_0} \quad (۱۴-۹)$$

که جمله اول در سمت راست معادله اخیر، بیانگر تجزیه تابع $H(s)$ به‌ازای قطبهای آن است که پاسخ ورودی صفر را می‌دهد، همچنین جمله $\frac{k_0}{s - s_0}$ هم ناشی از تحریک است و پاسخ حالت صفر را بیان می‌کند. مقدار k_0 را می‌توان از رابطه زیر پیدا کرد:

$$k_0 = (s - s_0) Y(s) \Big|_{s=s_0} = A_0 H(s_0) \quad (۱۵-۹)$$

و در نتیجه، پاسخ حالت صفر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

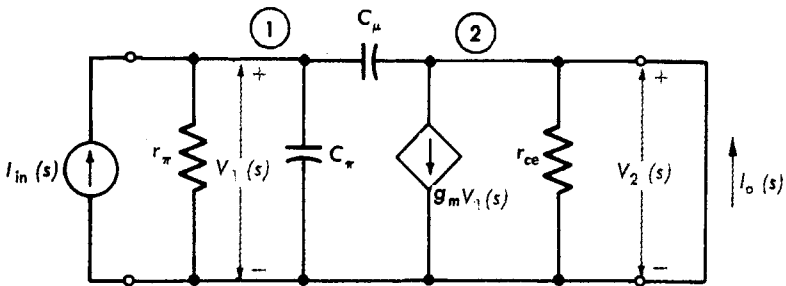
$$y_f(t) = A_o H(s_o) e^{s_o t} \quad (۱۶-۹)$$

از رابطه اخیر در می‌یابیم که نسبت دامنه پاسخ حالت صفر به دامنه تحریک (A_o)، برابر مقدار تابع شبکه ($H(s)$) به‌ازای فرکانس تحریک (که برابر s_o است) می‌باشد.

مثال (۴-۹): شکل (۸-۹) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که قسمت میانی آن، بیانگر یک ترانزیستور می‌باشد. در این مدار، موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) تابع شبکه $I_o(s)/I_{in}(s)$ را تعیین کنید.

ب) در صورتی که $r_\pi = 1000 \Omega$ ، $g_m = 0.2 \frac{1}{\Omega}$ ، $C_\pi = 49 \text{ pF}$ ، و $C_\mu = 1 \text{ pF}$ باشد و سیستم، بدون حالت اولیه برای متغیرهای خود باشد، آنگاه پاسخ $i_o(t)$ را به تحریک پله واحد تعیین نمایید.



شکل (۸-۹): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۴-۹)

حل: الف) با توجه به آنکه ولتاژ گره ۲ برابر صفر است ($V_2(s) = 0$)، آنگاه معادله KCL در گره ۱ به صورت زیر می‌باشد:

$$-I_{in}(s) + \frac{V_1(s)}{r_\pi} + sC_\pi V_1(s) + sC_\mu V_1(s) = 0$$

که در نتیجه،

$$V_1(s) = \frac{I_{in}(s)}{\frac{1}{r_\pi} + s(C_\pi + C_\mu)}$$

همچنین با نوشتن قانون KCL در گره ۲ داریم:

$$I_o(s) = g_m V_1(s) - I_\mu(s) = g_m V_1(s) - sC_\mu V_1(s)$$

حال اگر مقدار $V_1(s)$ را در معادله اخیر قرار دهیم آنگاه،

$$\frac{I_o(s)}{I_{in}(s)} = H(s) = \frac{g_m - sC_\mu}{\frac{1}{r_\pi} + s(C_\pi + C_\mu)}$$

و یا،

$$H(s) = \frac{g_m r_\pi \left(1 - \frac{sC_\mu}{g_m}\right)}{1 + s r_\pi (C_\pi + C_\mu)} = \frac{-C_\mu \left(s - \frac{g_m}{C_\mu}\right)}{(C_\pi + C_\mu) \left[s + \frac{1}{r_\pi (C_\pi + C_\mu)}\right]}$$

پس $H(s)$ دارای یک قطب و یک صفر است. قطب این تابع به مقدار،

$$p_1 = -\frac{1}{r_\pi (C_\pi + C_\mu)}$$

و صفر این تابع شبکه برابر $z_1 = g_m / C_\mu$ می‌باشد.

ب) در صورتی که تحریک (ورودی) سیستم، یک تابع پله واحد باشد آنگاه،

$$I_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

$$I_o(s) = H(s) I_{in}(s) = \frac{-C_\mu}{C_\pi + C_\mu} \times \frac{s - \frac{g_m}{C_\mu}}{s + \frac{1}{r_\pi (C_\pi + C_\mu)}} \times \frac{1}{s}$$

حال اگر مقادیر ارائه شده در صورت مثال را در رابطه اخیر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$I_o(s) = \frac{-\frac{1}{50}(s - 2 \times 10^{11})}{s + 2 \times 10^7} \times \frac{1}{s}$$

حال با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزیی می‌توان نوشت:

$$I_o(s) = \frac{k_1}{s + 2 \times 10^7} + \frac{k_o}{s}$$

که،

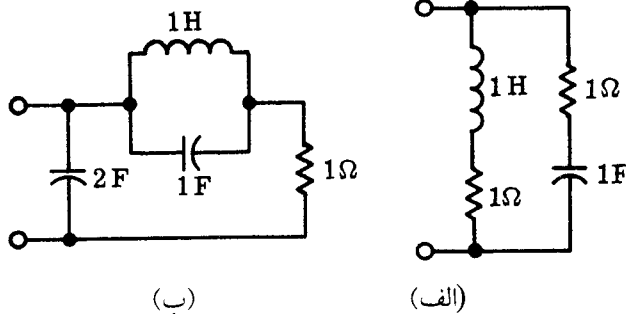
$$k_1 = \frac{-(s - 2 \times 10^{11})}{50s} \bigg|_{s=2 \times 10^7} = -200$$

$$k_o = \frac{-(s - 2 \times 10^{11})}{50(s + 2 \times 10^7)} \bigg|_{s=0} = +200$$

با قرار دادن مقادیر k_0 و k_1 در $I_o(s)$ و تعیین تبدیل معکوس لاپلاس نتیجه می‌گیریم که،

$$i_o(t) = -200e^{-2 \times 10^4 t} + 200 = 200(1 - e^{-2 \times 10^4 t})$$

تمرین (۳-۹): در مدارهای الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۹)، امپدانس‌های نقطه تحریک را بیابید و سپس قطب‌ها و صفرهای آن را محاسبه کنید.



شکل (۹-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۹)

جواب: (الف) $Z(s) = 1$ ؛ (ب) $Z(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1}$

۹-۵- فرکانس‌های طبیعی

در این بخش، برآنیم تا مفهوم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه و فرکانس‌های طبیعی یک شبکه را در حالت کلی ارائه نموده و راه‌های محاسبه این فرکانس‌ها را بیان نماییم. سپس در بخش بعدی، ارتباط فرکانس‌های طبیعی و تابع شبکه را تشریح می‌کنیم.

۹-۵-۱- فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه

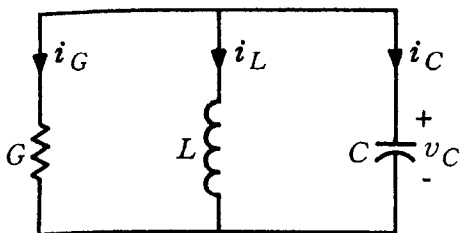
یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که تمام منابع نایسته در این شبکه، برابر صفر باشد. به عبارت دیگر، تمام منابع ولتاژ نایسته را اتصال کوتاه نموده و تمام منابع جریان نایسته را اتصال باز می‌کنیم. در این حالت، شبکه در شرایط ورودی صفر قرار دارد. حال اگر یکی از متغیرهای شبکه مذکور را در نظر بگیریم (از قبیل ولتاژ یک شاخه

یا یک گره، جریان یک شاخه یا یک حلقه (و برای آن متغیر، پاسخ ورودی صفر را به دست آوریم، آنگاه آن متغیر (که در حالت کلی با $y(t)$ نمایش دهیم) به شکل کلی زیر ظاهر می شود:

$$y(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots \quad t \geq 0 \quad (17-9)$$

که k_i و s_i مقادیر ثابتی هستند. البته مقادیر s_i به توپولوژی و ساختار شبکه بستگی دارد و k_i ها هم به شرایط اولیه اجزاء شبکه (سلف ها و خازن ها) بستگی دارند. مقادیر s_i در این شبکه را فرکانس های طبیعی متغیر موردنظر شبکه می نامیم. برای درک بهتر این موضوع، مثال زیر را بیان می کنیم.

مثال (۹-۵): مدار RLC ارائه شده در شکل (۹-۱۰) موردنظر است. در صورتی که مقادیر $C = 1F$ ، $R = \frac{1}{6}\Omega$ و $L = \frac{1}{25}H$ باشد آنگاه فرکانس طبیعی متغیرهای شبکه را بیابید.



شکل (۹-۱۰): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۵)

حل: با استفاده از قانون KCL در گره موردنظر شبکه می توان نوشت:

$$\frac{v_C(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t) dt + i_L(o^-) + C \frac{dv_C(t)}{dt} = 0$$

حال رابطه فوق را به حوزه فرکانس منتقل می کنیم:

$$(Cs + \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls})V_C(s) = Cv_C(o^-) - \frac{1}{s}i_L(o^-)$$

و در نتیجه،

$$V_C(s) = \frac{sCv_C(o^-) - i_L(o^-)}{Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}} = \frac{sv_C(o^-) - i_L(o^-)}{(s+3)^2 + 4^2}$$

حال با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزئی داریم:

$$v_C(t) =$$

$$= \frac{(-3+j4)v_C(o^-) - i_L(o^-)}{j8} e^{(-3+j4)t} + \frac{(-3-j4)v_C(o^-) - i_L(o^-)}{-j8} e^{(-3-j4)t}$$

در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که براساس رابطه (۹-۱۷)، فرکانس های طبیعی متغیر ولتاژ $v_C(t)$ به مقدار $-3+j4$ و $-3-j4$ می‌باشد. همچنین می‌توان اثبات کرد که این فرکانس های طبیعی ولتاژ $v_C(t)$ ، فرکانس های طبیعی دیگر متغیرهای شبکه از قبیل $i_L(t)$ ، $v_C(t)$ ، $i_C(t)$ و $v_R(t)$ می‌باشد.

از این مثال در می‌یابیم که برای هر متغیر شبکه مورد بحث، می‌توان یک معادله دیفرانسیل بر حسب زمان (که از جملات با مشتق های زمانی تشکیل شده است) به دست آورد. به عبارت دیگر، اگر $y(t)$ متغیر موردنظر باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل مربوط به پاسخ ورودی صفر آن به صورت زیر خواهد بود:

$$Q(D) \cdot y(t) = 0 \quad (9-18)$$

که $Q(D)$ چند جمله ای بر حسب مشتقات مرتبه های متعدد بر حسب زمان است. در نتیجه، هر پاسخ ورودی صفر متغیر $y(t)$ شبکه، جوابی از معادله (۹-۱۸) است و برعکس، هر جوابی از معادله (۹-۱۸)، پاسخ ورودی صفر متغیر $y(t)$ متناظر با حالت اولیه مشخصی خواهد بود. حال برای محاسبه فرکانس های طبیعی متغیر موردنظر $y(t)$ ، کافی است که ریشه های چند جمله ای $Q(D)$ را به دست آوریم. به عبارت دیگر، s_i یک فرکانس طبیعی متغیر $y(t)$ است، اگر و فقط اگر $Q(s_i) = 0$ باشد. حال اگر s_i یک صفر مرتبه m ام از چند جمله ای $Q(s)$ باشد، در این صورت s_i را یک فرکانس طبیعی از مرتبه m ام برای متغیر موردنظر $y(t)$ می‌نامیم.

مثال (۹-۶): در صورتی که متغیر ولتاژ شبکه ای همراه با معادله دیفرانسیل زیر باشد، فرکانس های طبیعی آن متغیر را بیابید:

$$\left(\frac{d^5}{dt^5} + 2 \frac{d^4}{dt^4} + 2 \frac{d^3}{dt^3} + 2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right) v(t) = 0$$

حل: معادله مذکور را به شکل زیر ساده تر می‌کنیم:

$$(D^5 + 2D^4 + 2D^3 + 2D^2 + D)v(t) = 0$$

حال اگر رابطه فوق را تجزیه کنیم، خواهیم داشت:

$$D(D^4 + 1)(D + 1)v(t) = 0$$

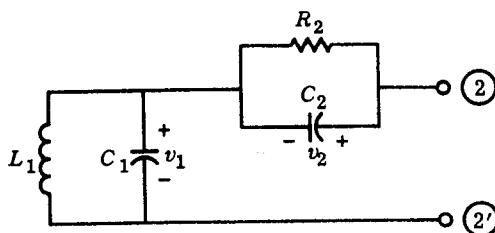
در نتیجه، پاسخ ورودی صفر $v(t)$ برابر می‌شود با:

$$v(t) = k_1 e^{j t} + k_2 e^{-j t} + (k_3 + k_4 t) e^{-t} + k_5$$

همان‌گونه که متوجه می‌شویم، فرکانس‌های طبیعی متغیر $v(t)$ ، برابر $s_1 = +j\omega$ ، $s_2 = -j\omega$ ، $s_3 = s_4 = -1$ ، و $s_5 = 0$ می‌باشد که فرکانس طبیعی ۱- از مرتبه ۲ می‌باشد. در این مثال می‌بینیم که یکی از فرکانس‌های طبیعی متغیر موردنظر برابر صفر ($s_5 = 0$) می‌باشد که به این معنی است که پاسخ ورودی صفر، دارای یک جمله ثابتی است. از نظر فیزیکی، این حالت هنگامی اتفاق می‌افتد که در مدار الکتریکی موردنظر، متغیر مربوطه می‌تواند جریان سلفی باشد که این سلف، در داخل حلقه‌ای است که دیگر عناصر این حلقه را عناصر سلفی تشکیل می‌دهند (زیرا در این حالت ممکن است جریان عبوری از سلف‌ها ثابت باشد و لذا ولتاژی در دو سر آنها ایجاد نشود). حالت دیگری که ممکن است اتفاق افتد، آن است که متغیر شبکه موردنظر، ولتاژ خازنی باشد که این خازن، در گره‌ای قرار دارد که تمام عناصر دیگر متصل به آن گره نیز خازن باشند (در این صورت، اگر ولتاژ دو سر خازنها ثابت باشد آنگاه جریان عبوری از خازن‌ها برابر صفر خواهد بود $C \frac{dv(t)}{dt} = 0$).

لازم به ذکر است که اگر فرکانس‌های طبیعی مرتبه m را همانند m فرکانس طبیعی در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان گفت که تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، معادل با مرتبه معادله دیفرانسیل متغیر مذکور است.

مثال (۷-۹): در این مثال، می‌خواهیم نشان دهیم که فرکانس‌های طبیعی دو متغیر یک شبکه، لزومی ندارد که با یکدیگر مساوی باشند. بدین منظور مدار ارائه‌شده در شکل (۹-۱۱) را در نظر بگیرید که در آن، سرهای ۲ و ۲' به صورت مدار باز هستند. فرکانس‌های طبیعی متغیرهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.



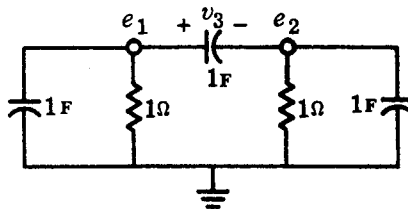
شکل (۹-۱۱): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۹)

حل: با توجه به مطالب ارائه‌شده در این بخش در می‌یابیم که فرکانس‌های طبیعی متغیر $v_1(t)$ برابر دو فرکانس $\pm j\sqrt{L_1 C_1}$ می‌باشد و این در حالی است که فرکانس‌های طبیعی متغیر $v_2(t)$ فقط $-\frac{1}{R_2 C_2}$ است که با یکدیگر برابر نیستند. این موضوع وقتی

با اهمیت‌تر می‌شود که با درک مفهوم فرکانس‌های طبیعی شبکه (که در بخش بعدی ارائه می‌شود) در می‌یابیم که فرکانس‌های طبیعی این شبکه با استفاده از روش حل گره برابر

$$-\sqrt{R_2 C_2} \text{ و } \pm j \sqrt{L_1 C_1} \text{ می‌باشد.}$$

تمرین (۴-۹): در مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۹-۱۲)، فرکانس‌های طبیعی متغیرهای ولتاژهای گره e_1 و e_2 و متغیر v_3 را بیابید.



شکل (۹-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۴-۹)

جواب: فرکانس‌های طبیعی متغیرهای e_1 و e_2 برابر -1 و $-1/3$ ، و فرکانس‌های طبیعی متغیر v_3 برابر $-1/3$ است.

۹-۵-۲- فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

در این بخش، می‌خواهیم به‌جای آنکه فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را در نظر بگیریم، فرکانس‌های طبیعی کل یک شبکه را مطرح نماییم. بدین منظور، مقدار s_k را فرکانس طبیعی یک شبکه می‌نامیم، اگر s_k فرکانس طبیعی ولتاژ و یا جریان متغیری از متغیرهای شبکه باشد. به‌عنوان نمونه در مثال (۹-۷)، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر برابر $\pm j \sqrt{L_1 C_1}$ و $-\sqrt{R_2 C_2}$ است که مجموعه فرکانس‌های طبیعی متغیرهای v_1 و v_2 می‌باشد. البته در ادامه خواهیم دید که برای تعیین فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، هیچ لزومی به محاسبه کلیه فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه وجود ندارد که در ادامه توضیح داده می‌شود.

به منظور واضح‌تر شدن موضوع، فرض کنید که $s_i \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان یک شاخه باشد، آنگاه می‌توان گفت که s_i فرکانس طبیعی ولتاژ همان شاخه نیز خواهد بود. برای اثبات این موضوع فرض کنید که جریان شاخه موردنظر برای فرکانس طبیعی s_i برابر $k_i e^{s_i t}$ باشد. حال اگر شاخه موردنظر، یک مقاومت با مقدار R_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر

آن دارای جمله $k_i R_i e^{s_i t}$ است و اگر شاخه مذکور، یک سلف با اندوکتانس L_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر سلف (با توجه به رابطه $v_i = L_i \frac{di(t)}{dt}$) دارای جمله $L_i k_i s_i e^{s_i t}$ خواهد بود و در نهایت، اگر شاخه موردنظر، یک خازن با ظرفیت خازنی C_i باشد، آنگاه ولتاژ دو سر آن (با توجه به رابطه $v_i(t) = v(o^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i_i(t) dt$) دارای جمله‌ای به صورت $C_i k_i \frac{1}{s_i} e^{s_i t}$ است که می‌بینیم در تمام حالات فوق، فرکانس طبیعی s_i ظاهر می‌شود.

لازم به ذکر است که شرط $s_i \neq 0$ به این علت است که اگر جریان عبوری از سلفی به مقدار ثابتی باشد، آنگاه ولتاژ دو سر آن، صفر است و اگر ولتاژ دو سر خازنی به مقدار ثابتی باشد بالطبع، جریان عبوری از آن، صفر خواهد بود. لذا $s_i = 0$ ممکن است فرکانس طبیعی جریان شاخه‌ای باشد، بدون آنکه فرکانس طبیعی ولتاژ آن شاخه نیز باشد و برعکس.

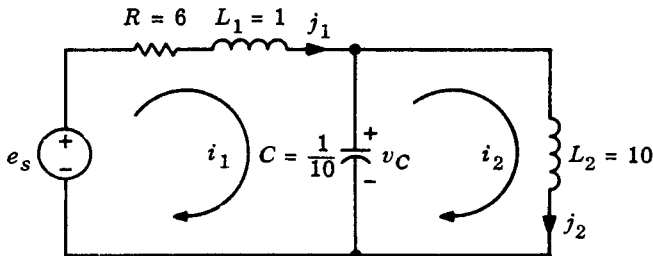
از مطالب فوق در می‌یابیم که برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیر صفر یک شبکه می‌توان از هر روش تجزیه و تحلیل (گره یا حلقه) استفاده نمود. در واقع اگر مثلاً $s_i \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان یک حلقه باشد، آنگاه لزوماً فرکانس طبیعی ولتاژ هر یک از عناصر آن حلقه نیز خواهد بود و برعکس. حال این مطالب را در حالت کلی به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه: یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که تمام منابع ناپسته در آن حذف شده و فقط شرایط اولیه برای متغیرها وجود داشته و شبکه به حوزه فرکانس منتقل شده باشد. حال اگر از طریق روش حلقه یا گره، تمام معادلات حلقه یا گره‌های شبکه را بنویسیم و آنها را به صورت ماتریسی بیان کنیم، آنگاه در حالت کلی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{P(s).X=f}$$

که در این رابطه، $\mathbf{X}$ بردار متغیرهای جریان‌های حلقه‌ها (در روش تحلیل حلقه) و یا متغیرهای ولتاژهای گره‌ها (در روش تحلیل گره)، $\mathbf{f}$ برداری در ارتباط با مقادیر اولیه ولتاژ و جریان خازن‌ها و سلف‌های مدار، و ماتریس $\mathbf{P(s)}$ ماتریس مربوط به توپولوژی شبکه می‌باشد. حال برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی شبکه مذکور، کافی است که ریشه‌های چند جمله‌ای حاصل شده از دترمینان ماتریس $\mathbf{P(s)}$ را محاسبه نمود.

مثال (۸-۹): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۹-۱۳) مفروض است. فرکانس های طبیعی شبکه موردنظر را بیابید. فرض کنید که ولتاژ اولیه خازن برابر $v_C(o^-)$ و جریان اولیه سلف ها برابر $j_1(o^-)$ و $j_2(o^-)$ می باشد.



شکل (۹-۱۳): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۸-۹)

حل: ابتدا با استفاده از روش حلقه، دو معادله مربوط به دو حلقه را می نویسیم. البته با توجه به آنکه در تعیین فرکانس های طبیعی شبکه، منابع ناپسته بی تأثیر هستند، لذا منابع ولتاژ را به صورت اتصال کوتاه فرض می کنیم. لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} + 6i_1 + 10 \int i_1(t) dt - 10 \int i_2(t) dt = -v_C(o^-) \\ -10 \int i_1(t) dt + 10 \frac{di_2(t)}{dt} + 10 \int i_2(t) dt = v_C(o^-) \end{cases}$$

حال روابط اخیر را به حوزه لاپلاس انتقال می دهیم.

$$sI_1(s) - j_1(o^-) + 6I_1(s) + \frac{10}{s}I_1(s) - \frac{10}{s}I_2(s) = \frac{-V_C(o^-)}{s}$$

$$-\frac{10}{s}I_1(s) + 10sI_2(s) - 10j_2(o^-) + \frac{10}{s}I_2(s) = \frac{V_C(o^-)}{s}$$

با ضرب دو رابطه اخیر در متغیر s و مرتب نمودن آن داریم:

$$\begin{cases} (s^2 + 6s + 10)I_1(s) + (-10)I_2(s) = -V_C(o^-) + sj_1(o^-) \\ (-10)I_1(s) + (10s^2 + 10)I_2(s) = V_C(o^-) + 10sj_2(o^-) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} s^2 + 6s + 10 & -10 \\ -10 & 10s^2 + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_C(o^-) + sj_1(o^-) \\ V_C(o^-) + 10sj_2(o^-) \end{bmatrix}$$

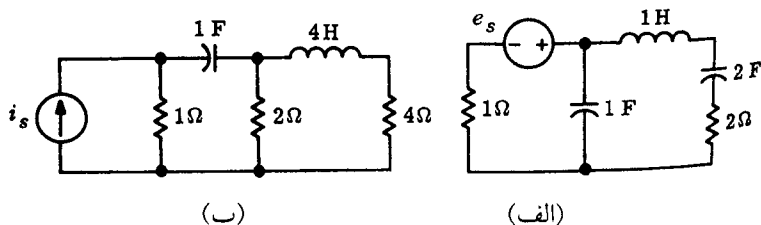
اکنون دترمینان ماتریس ضرایب را به دست می آوریم که،

$$\Delta[P(s)] = (s^2 + 6s + 10)(10s^2 + 10) - 100 = 0$$

$$(s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s) = 0$$

که ریشه‌های معادله اخیر، برابر ۰، -۱، -۲، و -۳ می‌باشد که در واقع، همان فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر می‌باشد.

تمرین (۵-۹): فرکانس طبیعی متغیرهای شبکه‌های نشان داده شده در شکل (۹-۱۴) را بیابید.



شکل (۹-۱۴): شبکه‌های الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۹)

جواب: (الف) $(s_1 = 0, s_{2,3} = -1/42 \pm j)$ ؛ (ب) $s_1 = -1, s_2 = -1/4$

۹-۶- تعیین فرکانس‌های طبیعی با استفاده از تابع شبکه

در بخش قبل، مفاهیم فرکانس‌های طبیعی یک متغیر و یک شبکه را بررسی نمودیم و نحوه تعیین آنها را ارائه دادیم. دیدیم که فرکانس‌های طبیعی غیر صفر هر شبکه ای، همان صفرهای دترمینان دستگاه معادلاتی است که به وسیله هر روش کلی تجزیه و تحلیل مدار (از قبیل روش حل گره یا حلقه) به دست آمده است. حال با توجه به اهمیت فرکانس‌های طبیعی در درک خصوصیات شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، در این بخش، روابط میان فرکانس‌های طبیعی یک شبکه و قطب‌های یک تابع شبکه را بررسی خواهیم کرد.

با توجه به آنکه فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، فقط به توپولوژی شبکه و مقادیر اجزاء آن بستگی دارد و به ورودی شبکه و منابع نایسته آن وابسته نمی‌باشد؛ لذا در هنگام محاسبه فرکانس‌های طبیعی، تمام منابع نایسته را برابر صفر قرار می‌دهیم. در این وضعیت، کلیه منابع ولتاژ نایسته را اتصال کوتاه، و منابع جریان نایسته را مدار باز می‌کنیم تا اثرات این منابع، در سیستم حذف گردد. به این نوع شبکه‌ها، شبکه‌های بی تحریک می‌گویند. حال می‌خواهیم با استفاده از این شبکه بی تحریک^۱ و با استفاده از منابع نایسته جریان یا ولتاژ، فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آوریم.

^۱- Unforced Networks

الف) استفاده از منبع ناپسته جریان: در این روش، فرض کنید که یک منبع ناپسته با جریان $i_o(t)$ به شبکه بی تحریک تزریق شود. این تزریق، باید به گونه ای باشد که حذف منبع مذکور (یعنی باز شدن آن) تأثیری در شبکه بی تحریک نگذارد. بدین منظور، باید دو سر منبع جریان به دو گره از گره های شبکه موردنظر متصل شود. به عبارت دیگر، دو سر منبع جریان مذکور به دو گره، لحیم می شود. این موضوع در شکل (۹-۱۵-الف) نشان داده شده است. حال امیدانس نقطه تحریک را در حوزه فرکانس که به وسیله منبع جریان دیده می شود، به دست می آوریم که برابر است با:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I_o(s)} = \frac{\mathcal{L}[v(t)]}{\mathcal{L}[i_o(t)]} \quad (9-19)$$

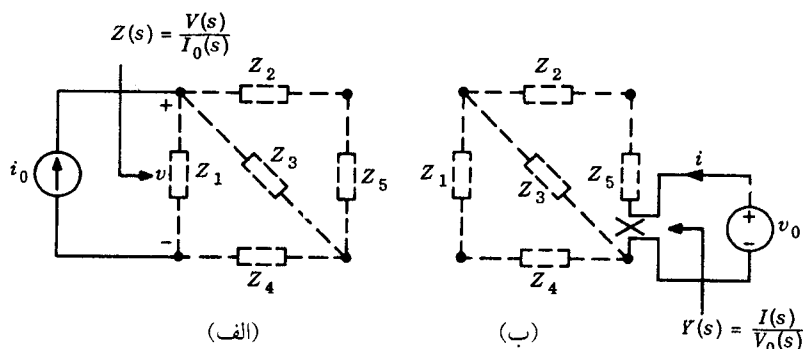
که $I_o(s)$ تبدیل لاپلاس منبع جریان $i_o(t)$ و $V(s)$ تبدیل لاپلاس ولتاژ دو سر منبع است.

اکنون باید گفت که قطب های $Z(s)$ ، فرکانس های طبیعی متغیر $v(t)$ است و در نتیجه، فرکانس های طبیعی شبکه مذکور نیز خواهد بود. این موضوع از آنجا نتیجه می شود که با به کار بردن منبع جریان مذکور، توپولوژی و مقادیر اجزاء شبکه بی تحریک تغییر نمی یابد و لذا تغییری در رفتار طبیعی شبکه ایجاد نمی شود. لذا می توان نتیجه گرفت که قطب های $Z(s)$ ، فرکانس های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

ب) استفاده از منبع ناپسته ولتاژ: در این روش، مشابه روش قبل، یک منبع ناپسته با ولتاژ $v_o(t)$ به شبکه بی تحریک تزریق می شود. منبع ولتاژ مذکور باید به گونه ای وارد شبکه گردد که با حذف آن (یعنی اتصال کوتاه شدن دو سر آن) تأثیری در شبکه نگذارد. بدین منظور، برای تزریق منبع ولتاژ مذکور، یک شاخه از شبکه بی تحریک را قطع کرده و منبع ولتاژ را در آنجا قرار دهیم. به عبارت دیگر، با بریده شدن یک شاخه دلخواه، دو سر منبع ولتاژ به دو سر بریده شده متصل می شود. این موضوع در شکل (۹-۱۵-ب) نشان داده شده است. حال برای تعیین فرکانس های طبیعی شبکه، لازم است ادمیتانس نقطه تحریک $Y(s)$ را که به وسیله منبع ولتاژ دیده می شود، محاسبه نمود. یعنی،

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V_o(s)} = \frac{\mathcal{L}[i(t)]}{\mathcal{L}[v_o(t)]} \quad (9-20)$$

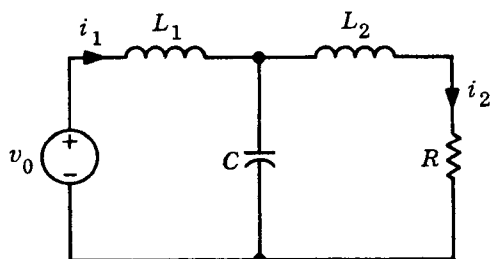
براساس مطالب ارائه شده در بخش قبل، می دانیم که قطب های $Y(s)$ ، فرکانس های طبیعی متغیر $i(t)$ می باشد. در نتیجه می توان گفت که این فرکانس های طبیعی متغیر $i(t)$ ، فرکانس های طبیعی شبکه موردنظر نیز می باشد.



شکل (۹-۱۵): نحوه اتصال منبع نابسته برای تعیین فرکانس‌های طبیعی:

(الف) اتصال منبع جریان؛ (ب) اتصال منبع ولتاژ

مثال (۹-۹): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۹-۱۶) یک صافی پایین گذر را نشان می‌دهد. حال با قرار دادن یک منبع ولتاژ $v_0(t)$ و با محاسبه جریان $i_1(t)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه را پیدا کنید.



شکل (۹-۱۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۹-۹)

حل: برای یافتن فرکانس‌های طبیعی شبکه مذکور، باید ادمیتانس انتقال $H(s) = \frac{I_1(s)}{V_0(s)}$ را پیدا کنیم که $I_1(s)$ و $V_0(s)$ ، تبدیل لاپلاس متغیرهای $i_1(t)$ و $v_0(t)$ است. بدین منظور، با استفاده از روش تجزیه و تحلیل حلقه، معادلات مربوطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (L_1 s + \frac{1}{C s}) I_1(s) - \frac{1}{C s} I_2(s) = V_0(s) \\ -\frac{1}{C s} I_1 + (R + L_2 s + \frac{1}{C s}) I_2(s) = 0 \end{cases}$$

البته فرض شده است که تمام متغیرهای شبکه در حالت صفر قرار دارند. حال از این دو معادله اخیر، $I_1(s)$ را پیدا می‌کنیم. یعنی،

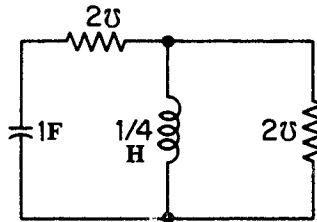
$$I_1(s) = \frac{V_o(s) \left(R + L_1 s + \frac{1}{Cs} \right)}{L_1 L_2 s^2 + R L_1 s + \frac{(L_1 + L_2)}{C} + \frac{R}{Cs}} = \frac{V_o(s) (1 + L_2 C s^2 + R C s)}{L_1 L_2 C s^2 + R L_1 C s + (L_1 + L_2) s + R}$$

بنابراین، تابع شبکه ادمیتانس برابر است با:

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_o(s)} = \frac{1 + L_2 C s^2 + R C s}{L_1 L_2 C s^2 + R L_1 C s + (L_1 + L_2) s + R}$$

که قطب‌های این تابع، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه $L_1 L_2 C s^2 + R L_1 C s + (L_1 + L_2) s + R = 0$ بیانگر فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

تمرین (۹-۶): فرکانس‌های طبیعی شبکه ارائه شده در شکل (۹-۱۷) را با استفاده از منبع ولتاژ و منبع جریان که در ارتباط با خازن ۱F باشند، به دست آورید.



شکل (۹-۱۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۶)

جواب: $s = -1 \pm j1$

۹-۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

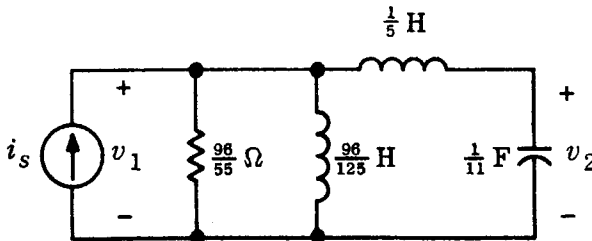
در این فصل، مفاهیم مرتبط با تابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی آن را بیان نمودیم و روش‌های محاسبه آنان را ارائه دادیم. به عنوان خلاصه و نتیجه‌گیری از مطالب این فصل، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- توابع شبکه در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، توابع گویایی هستند که صورت و منخرج آنان، بر حسب چند جمله‌ای‌های بر حسب s به همراه ضرایب حقیقی بیان می‌شوند.
- ریشه‌های چند جمله‌ای صورت یک تابع شبکه، صفرهای آن تابع و به ریشه‌های چند جمله‌ای منخرج تابع مذکور، قطب‌های آن تابع می‌گویند.

- مقدار s_1 را می‌توان فرکانس طبیعی متغیر $y(t)$ شبکه نامید، اگر و فقط اگر پاسخ ورودی صفر $y(t)$ برای حالت اولیه معینی، دارای جمله‌ای به صورت $k_1 e^{s_1 t}$ باشد.
- اگر s_i فرکانس طبیعی ولتاژ و یا جریان عنصری از عناصر شبکه باشد آنگاه می‌توان گفت که این فرکانس طبیعی متغیر مذکور، فرکانس طبیعی شبکه موردنظر نیز می‌باشد.
- فرض کنید که $P(s)$ ماتریس چند جمله‌ای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف کننده شبکه موردنظر باشد. حال کلیه ریشه‌های دترمینان این ماتریس، فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه موردنظر می‌باشند.
- هر فرکانس طبیعی یک شبکه، یک قطب یکی از توابع شبکه است. برای این منظور، شبکه بی تحریک را در نظر می‌گیریم. آنگاه اگر از منبع جریان ناپسته‌ای که بین دو گره وصل شود، استفاده کنیم و امپدانس شبکه $Z(s)$ را از این دو گره ببینیم می‌توان نتیجه گرفت که قطب‌های این تابع شبکه $Z(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه است. همچنین اگر از منبع ولتاژ ناپسته‌ای در یک نقطه بریده‌شده از شاخه شبکه موردنظر استفاده کنیم و ادmittانس شبکه $Y(s)$ را از دو سر منبع ببینیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که قطب‌های تابع شبکه $Y(s)$ ، فرکانس‌های طبیعی شبکه موردنظر خواهد بود.

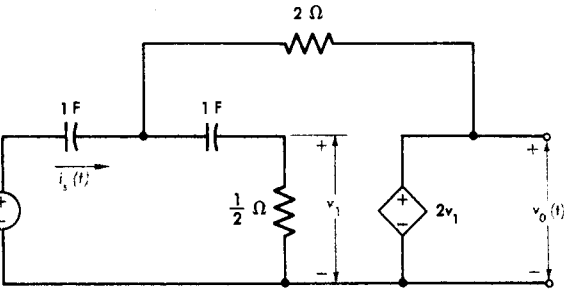
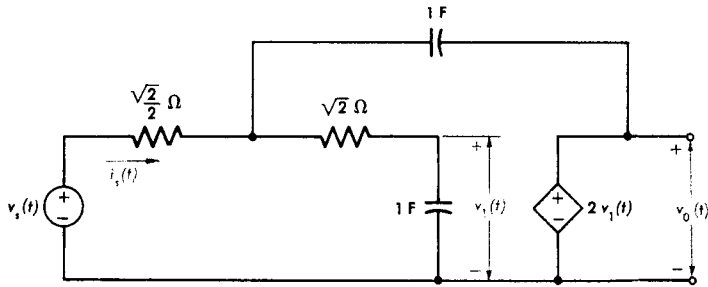
۹-۸- مسائل مروری

- ۱- شکل (۹-۱۸) یک مدار الکتریکی با ورودی منبع ناپسته جریان i_s را نشان می‌دهد. در این مدار مطلوبست: الف) تعیین امپدانس نقطه تحریک $Z(s) = V_1(s)/I_s(s)$ ؛ ب) امپدانس انتقال $H(s) = V_2(s)/I_c(s)$ را محاسبه کنید.



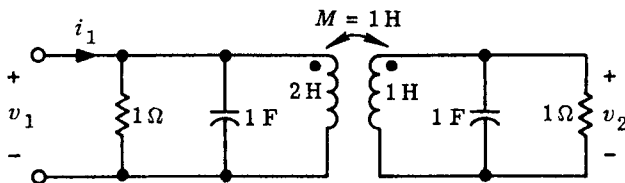
شکل (۹-۱۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

- ۲- مدارهای ارائه شده در شکل (۹-۱۹)، اساس فیلترهای مدارهای مجتمع را نشان می‌دهد. در این مدارهای الکتریکی مطلوبست: الف) تابع انتقال $V_o(s)/V_s(s)$ ؛ ب) در صورتی که $v_s(t) = \cos u(t)$ باشد پاسخ $v_o(t)$ را بیابید.



شکل (۹-۱۹): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

۳- مدار معادل را در مدار تزویج‌شده شکل (۹-۲۰) بیابید. در این مدار: الف) امپدانس نقطه تحریک $V_1(s)/I_1(s)$ را تعیین کنید؛ ب) امپدانس انتقال $V_2(s)/I_1(s)$ را بیابید؛ ج) نسبت انتقال ولتاژ $V_2(s)/V_1(s)$ را مشخص کنید.

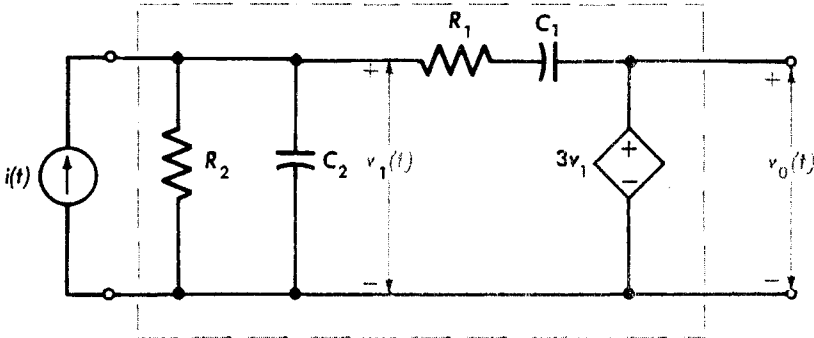


شکل (۹-۲۰): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

۴- در مدارهای الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۹-۱۹)، امپدانس نقطه تحریک $V_s(s)/I_s(s)$ را بیابید.

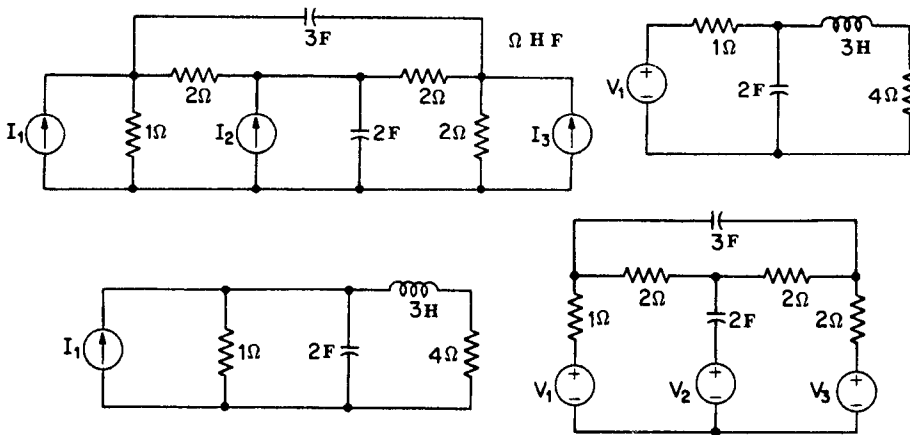
۵- قسمت محصور مدار الکتریکی مشخص‌شده در شکل (۹-۲۱)، یک مدار نوسان ساز را نشان می‌دهد. در این مدار، مطلوبست: الف) تابع تبدیل $V_o(s)/I(s)$ ؛ ب) هر گاه $i(t)$

یک تابع پله واحد باشد و $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ، $C_1 = C_2 = 1000 \text{ pF}$ ، و $A=3$ باشد
آنگاه پاسخ $v_o(t)$ را بیابید.



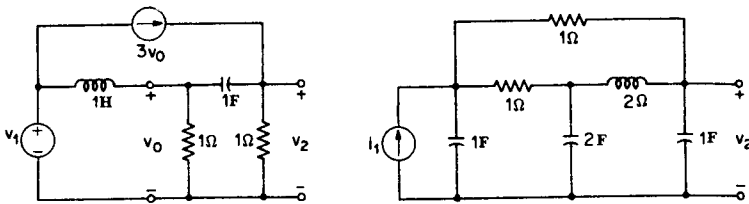
شکل (۹-۲۱): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

۶- فرکانس‌های طبیعی را برای مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۹-۲۲) بیابید.



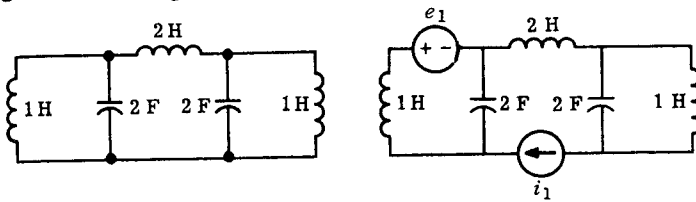
شکل (۹-۲۲): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

۷- معادلات دیفرانسیل انتگرال مدارهای ارائه‌شده در شکل (۹-۲۳) را با ورودی منابع
نابسته و خروجی‌های مشخص‌شده $v_2(t)$ بیابید. سپس معادلات مذکور را به حوزه
فرکانس انتقال دهید.



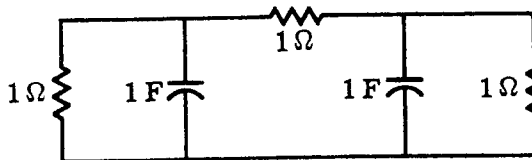
شکل (۹-۲۳): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

۸- فرکانس‌های طبیعی مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۹-۲۴) را تعیین کنید.



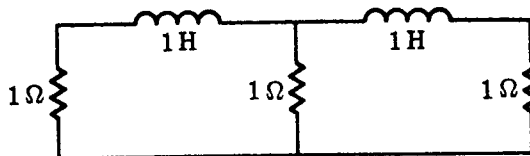
شکل (۹-۲۴): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- با استفاده از تابع شبکه و تزریق منبع جریان به شبکه ارائه شده در شکل (۹-۲۵)، فرکانس‌های طبیعی مدار را بیابید.



شکل (۹-۲۵): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- با استفاده از تابع شبکه و تزریق منبع ولتاژ به شبکه ارائه شده در شکل (۹-۲۶)، فرکانس‌های طبیعی مدار را بیابید.



شکل (۹-۲۶): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

فصل دهم

شبکه‌های دو قطبی

۱۰-۱- مقدمه

در بسیاری از سیستم‌های الکتریکی از قبیل: مدارهای الکترونیکی و مخابراتی، سیستم‌های کنترل، سیستم‌های انتقال و توزیع برق و... سیگنال‌های الکتریکی (و یا انرژی الکتریکی) از طریق دو پایانه وارد سیستم شده و پس از اعمال فعل و انفعالات الکتریکی، از دو پایانه دیگر خارج می‌شود. البته دو پایانه (دو سر) خروجی می‌تواند به پایانه‌های ورودی سیستم دیگری متصل شوند. به سیستم‌هایی که دارای دو جفت پایانه باشند، شبکه‌های دو قطبی می‌گویند. به عبارت دیگر، به هر جفت پایانه ورودی یا خروجی، یک قطب می‌گویند و به شبکه‌هایی که دارای یک جفت پایانه باشند، شبکه‌های تک قطبی می‌گویند. در این نوع شبکه‌ها، امکان دسترسی و اتصال به هیچ یک از گره‌های داخلی شبکه وجود ندارد و ارتباط با شبکه، فقط از طریق پایانه‌های آن صورت می‌گیرد. لذا برای تحلیل این نوع شبکه‌ها فقط به سراغ روابط جریان و ولتاژ در پایانه‌های شبکه می‌رویم و کاری به ماهیت جریان‌ها و ولتاژهای درون شبکه نداریم. لذا در این فصل، ابتدا با مطالعه شبکه‌های تک قطبی، با تعدادی از پارامترهای آن آشنا شده و سپس به سراغ پارامترهای یک شبکه دو قطبی می‌رویم و خصوصیات و روش‌های تحلیل آنان را بیان می‌کنیم.

۱۰-۲- شبکه‌های تک قطبی

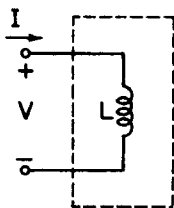
در این بخش، برآنیم تا با مفاهیم شبکه‌های تک قطبی که قابل توسعه به شبکه‌های دو قطبی هستند، آشنا شویم. این مطالب براساس توابع شبکه (از جمله توابع امیدانس،

ادمیتانس و توابع انتقال) می‌باشند. بدین منظور، مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۱-۱۰) را در نظر بگیرید. همان‌گونه که مشخص است، مدارهای شکل (۱-۱۰-الف) و (۱-۱۰-ب) مدارهای الکتریکی ساده‌ای می‌باشند که دارای دو پایانه هستند و شکل کلی این نوع مدارها را می‌توان مطابق شکل (۱-۱۰-ج) به صورت یک جعبه و دو پایانه نشان داد که ولتاژ و جریان این دو سر برابر $\bar{V}$ و $\bar{I}$ می‌باشد که به این نوع شبکه‌ها، شبکه‌های تک قطبی می‌گویند. حال برای بیان مشخصات این شبکه از طریق پایانه‌های آن، می‌توان به ارتباط ولتاژ و جریان این پایانه‌ها با یکدیگر اشاره نمود. به عبارت دیگر برای شکل (۱-۱۰-الف) داریم:

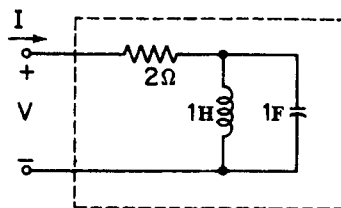
$$V(s) = sL.I(s) \quad (۱-۱۰)$$

و برای شکل (۱-۱۰-ب) ارتباط $V(s)$ و $I(s)$ به شکل زیر در می‌آید:

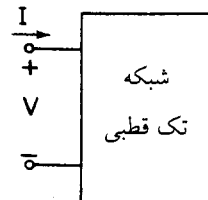
$$V(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s^2 + 1} I(s) \quad (۲-۱۰)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۱-۱۰): شبکه‌های تک قطبی

حال در حالت کلی برای شکل (۱-۱۰-ج) ارتباط بین متغیرهای $V(s)$ و $I(s)$ را می‌توان از طریق امپدانس $Z(s)$ بیان نمود که،

$$V(s) = Z(s).I(s) \quad (۳-۱۰)$$

یعنی در شکل (۱-۱۰-الف)، امپدانس $Z(s)$ برابر sL و در شکل (۱-۱۰-ب) برابر

$$\frac{2s^2 + s + 2}{s^2 + 1} \text{ می‌باشد.}$$

همچنین ارتباط ولتاژ و جریان یک شبکه تک قطبی را می‌توان از طریق ادمیتانس شبکه نیز بیان نمود. به عبارت دیگر، روابط (۱-۱۰) تا (۳-۱۰) را می‌توان به شکل زیر نیز ارائه داد:

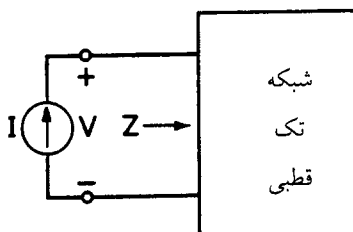
$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) \quad (۴-۱۰)$$

$$I(s) = \frac{s^2 + 1}{2s^2 + s + 2} V(s) \quad (۵-۱۰)$$

$$I(s) = Y(s)V(s) \quad (۶-۱۰)$$

به عبارت دیگر، ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان دو سر یک شبکه تک قطبی را می‌توان از طریق امپدانس و یا ادمیتانس دیده‌شده از دو سر شبکه بیان نمود. بدین منظور، اگر به دو سر شبکه موردنظر، یک منبع جریان $I(s)$ مطابق شکل (۲-۱۰) اعمال کنیم، آنگاه با تعیین ولتاژ دو سر شبکه، امپدانس شبکه به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

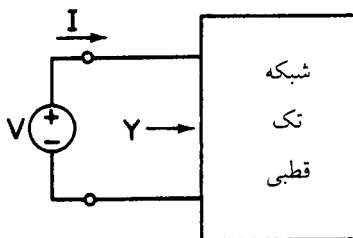
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (۷-۱۰)$$



شکل (۲-۱۰): شبکه تک قطبی تحریک‌شده با جریان

لازم به‌ذکر است که یک تابع شبکه به‌صورت $\left[\frac{\text{پاسخ حالت صفر}}{\text{ورودی یا تحریک}} \right]$ تعریف می‌شود. همچنین اگر ورودی به شبکه، به‌صورت یک منبع ولتاژ $V(s)$ باشد، آنگاه با تعیین جریان $I(s)$ ، ادمیتانس شبکه از دو سر آن مطابق شکل (۳-۱۰) برابر است با:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \quad (۸-۱۰)$$



شکل (۳-۱۰): شبکه تک قطبی تحریک‌شده با ولتاژ

لازم به‌ذکر است که مطالب مذکور با این فرض ارائه شده است که هیچ منبع مستقلی در شبکه وجود ندارد، زیرا در غیر این‌صورت، در حالتی که شبکه از دو سر موردنظر

به صورت مدار باز باشد، آنگاه ولتاژ $V_o(s)$ ناشی از منابع مستقل داخل شبکه در دو سر شبکه ایجاد می شود. لذا معادله (۱۰-۳) به صورت زیر تغییر می یابد:

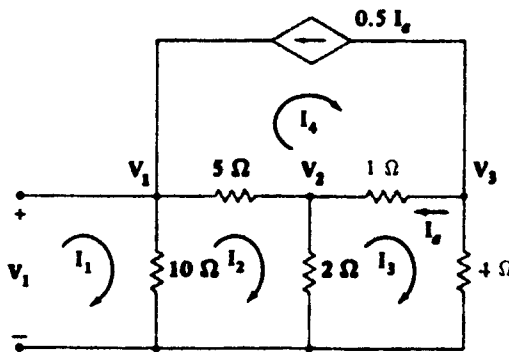
$$V(s) = Z(s).I(s) + V_o(s) \quad (۱۰-۹)$$

که $V_o(s)$ جمله مربوط به منابع مستقل موجود در شبکه با وجود $I(s) = 0$ می باشد. همچنین در این شرایط، معادله (۱۰-۶) نیز که با وجود ادمیتانس شبکه بود به شکل زیر تغییر می یابد:

$$I(s) = Y(s).V(s) + I_o(s) \quad (۱۰-۱۰)$$

که $I_o(s)$ جریان ناشی از منابع مستقل موجود در شبکه با وجود $V(s) = 0$ (یعنی اتصال کوتاه شدن دو سر شبکه) می باشد.

مثال (۱۰-۱): در شبکه مقاومتی ارائه شده در شکل (۱۰-۴)، امپدانس از دو سر ورودی با ولتاژ V_1 را بیابید.



شکل (۱۰-۴): شبکه الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۱)

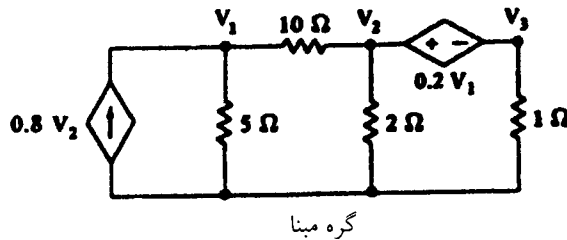
حل: برای این منظور، منبع جریانی به مقدار I_1 به دو سر شبکه ارائه شده متصل می کنیم و سپس قوانین KCL را برای سه گره شبکه می نویسیم. بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -I_1 - 0.5I_4 + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{2} + \frac{V_2 - V_3}{1} = 0 \\ \frac{V_3}{4} + \frac{V_3 - V_2}{1} + 0.5I_4 = 0 \\ I_4 = \frac{V_3 - V_2}{1} \end{cases}$$

حال با حل معادلات فوق می‌توان امپدانس Z_{in} دیده‌شده از دو سر شبکه را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 3/71 \, \Omega$$

تمرین (۱۰-۱): یک مدار الکتریکی مطابق شکل (۱۰-۵) موردنظر می‌باشد. ادمیتانس دیده‌شده از دو سر گره ۲ و گره مبنا را محاسبه کنید.



گره مبنا
شکل (۱۰-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۱)

راهنمایی و جواب: از مدار معادل تونن و نورتن استفاده کنید که $U_T = 0/7 \, \text{V}$

۱۰-۳- شبکه دو قطبی

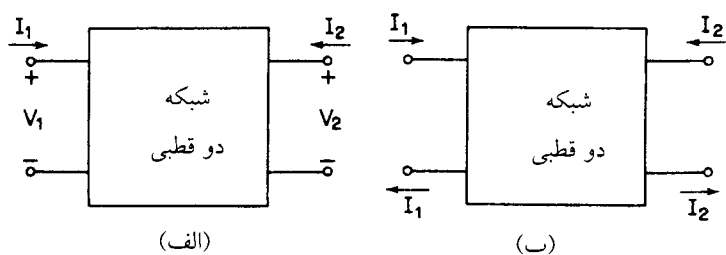
حال می‌خواهیم یک شبکه دو قطبی را که از دو جفت پایانه به‌عنوان ورودی و خروجی تشکیل شده است، مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. یک شبکه دو قطبی را در حالت کلی به‌صورت شکل (۱۰-۶) در نظر می‌گیریم که زیرنویس ۱ مربوط به متغیرهای قطب ورودی (در سمت چپ) و زیرنویس ۲ برای متغیرهای قطب خروجی (سمت راست) می‌باشد. با توجه به دو قطب شبکه، چهار متغیر V_1 ، V_2 ، I_1 و I_2 تعریف می‌شوند که این چهار متغیر به شکل‌های مختلف با یکدیگر ترکیب شده و معادلات یک شبکه دو قطبی را نشان می‌دهند. بدین منظور، حالت کلی معادلات یک شبکه دو قطبی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$U_1(s) = k_{11}(s) \cdot W_1(s) + k_{12}(s) \cdot W_2(s) \quad (11-10)$$

$$U_2(s) = k_{21}(s) \cdot W_1(s) + k_{22}(s) \cdot W_2(s)$$

که $U_1(s)$ ، $U_2(s)$ ، $W_1(s)$ و $W_2(s)$ از متغیرهای $V_1(s)$ ، $V_2(s)$ ، $I_1(s)$ و $I_2(s)$ انتخاب می‌شوند و $k_{ij}(s)$ ، توابع شبکه مربوط به متغیرهای انتخاب شده می‌باشد که به این $k_{ij}(s)$ ها، پارامترهای شبکه^۱ نیز می‌گویند.

^۱- Network Topology



شکل (۱۰-۶): متغیرها در یک شبکه دو قطبی

با توجه به اینکه متغیرهای $U_1(s)$ و $U_2(s)$ از چهار متغیر ولتاژ و جریان دو قطبی‌ها انتخاب می‌شوند، لذا شش حالت ممکن در انتخاب این متغیرها وجود دارد و بالطبع، دو متغیر دیگر یعنی $W_1(s)$ و $W_2(s)$ ، اجباراً از دو متغیر باقیمانده انتخاب می‌شوند. این شش حالت را می‌توان در جدول (۱۰-۱) مشاهده نمود. با این شش حالت، می‌توان به مشخصات شبکه و پارامترهای آن پی برد. در ادامه این فصل، خواهیم دید که با معلوم شدن پارامترهای $k_{ij}(s)$ در یکی از حالت‌ها، می‌توان دیگر پارامترهای حالت‌های دیگر را مشخص نمود.

جدول (۱۰-۱): شش حالت انتخاب متغیرهای شبکه دو قطبی

حالت	$U_1(s)$	$U_2(s)$	$W_1(s)$	$W_2(s)$
اول	$V_1(s)$	$V_2(s)$	$I_1(s)$	$I_2(s)$
دوم	$I_1(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$V_2(s)$
سوم	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$V_1(s)$	$I_2(s)$
چهارم	$V_1(s)$	$I_2(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$
پنجم	$V_1(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$-I_2(s)$
ششم	$V_2(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$-I_1(s)$

۱۰-۴- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای Z

در بخش قبل، نشان دادیم که شش حالت برای انتخاب متغیرهای یک شبکه دو قطبی وجود دارد که در حالت اول آن، $U_1(s)$ و $U_2(s)$ به صورت $V_1(s)$ و $V_2(s)$ انتخاب می‌شوند و متغیرهای $W_1(s)$ و $W_2(s)$ بالطبع، متغیرهای $I_1(s)$ و $I_2(s)$ خواهند بود. حال با توجه به واحد متغیرهای جایگزینی در $U(s)$ و $W(s)$ (که بترتیب به صورت

متغیرهای ولتاژ و جریان هستند) در می‌یابیم که پارامترهای $k_{ij}(s)$ شبکه باید از جنس اмпدانس باشند. لذا رابطه (۱۰-۱۱) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$V_1(s) = z_{11}(s) \cdot I_1(s) + z_{12}(s) \cdot I_2(s) \quad (10-12)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s) \cdot I_1(s) + z_{22}(s) \cdot I_2(s)$$

که $z_{ij}(s)$ را پارامترهای $\mathbf{Z}$ می‌گویند. در صورتی که رابطه اخیر را به شکل ماتریسی بنویسیم داریم:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s) \quad (10-13)$$

به ماتریس $\mathbf{Z}(s)$ ، ماتریس پارامترهای $\mathbf{z}$ می‌گویند.

حال می‌خواهیم ببینیم برای یک شبکه دو قطبی موردنظر، پارامترهای $z_{11}(s)$ ، $z_{12}(s)$ ، $z_{21}(s)$ و $z_{22}(s)$ را چگونه می‌توان محاسبه نمود.

محاسبه $z_{11}(s)$ و $z_{21}(s)$: برای محاسبه $z_{11}(s)$ فرض کنید که قطب خروجی شبکه به صورت مدار باز باشد تا $I_2(s) = 0$ گردد. در نتیجه با استفاده از رابطه (۱۰-۱۲) خواهیم داشت:

$$V_1(s) = z_{11}(s) \cdot I_1(s) \Big|_{I_2(s)=0} \quad (10-14)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s) \cdot I_1(s) \Big|_{I_2(s)=0} \quad (10-15)$$

به عبارت دیگر، برای محاسبه $z_{11}(s)$ کافی است که با اتصال یک منبع جریان $I_1(s)$ به قطب ورودی و اتصال باز نمودن قطب خروجی، ولتاژ دو سر قطب ورودی $V_1(s)$ را اندازه‌گیری کنیم. در نتیجه،

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (10-16)$$

همچنین اگر در همین شرایط، ولتاژ دو سر قطب خروجی (یعنی $V_2(s)$) را اندازه‌گیری کنیم خواهیم داشت:

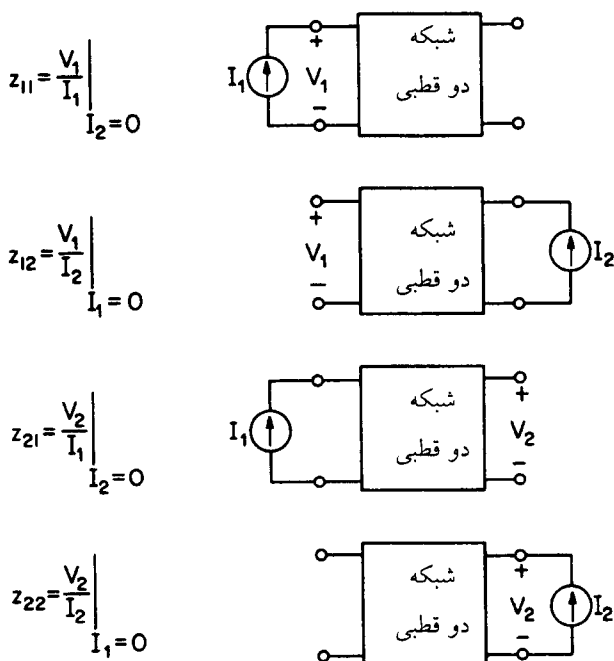
$$z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (10-17)$$

محاسبه $z_{12}(s)$ و $z_{22}(s)$: مشابه حالت قبل، برای محاسبه این دو پارامتر $\mathbf{z}$ ، یک منبع جریان نابسته $I_2(s)$ به قطب خروجی متصل می‌کنیم. حال با اندازه‌گیری ولتاژ دو قطب ورودی و خروجی بترتیب $z_{12}(s)$ و $z_{22}(s)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$z_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (18-10)$$

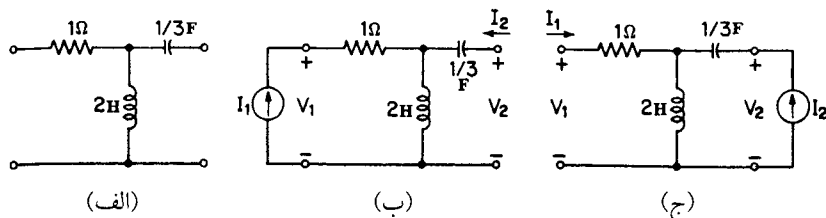
$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (19-10)$$

نحوه محاسبه این چهار پارامتر را می‌توان به صورت شماتیک در شکل (۷-۱۰) مشاهده نمود.



شکل (۷-۱۰): نحوه محاسبه پارامترهای ماتریس امپدانس Z

مثال (۲-۱۰): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۱۰-الف)، ماتریس امپدانس Z و پارامترهای آن را بیابید.



شکل (۸-۱۰): شبکه مربوط به مثال (۲-۱۰)

حل: برای تعیین $z_{11}(s)$ و $z_{21}(s)$ یک منبع جریان نابسته به قطب ورودی (سمت چپ مدار) مطابق شکل (۱۰-۸-ب) متصل می‌کنیم. آنگاه با استفاده از رابطه KVL داریم:

$$V_1(s) = 1 \times I_1(s) + 2s \cdot I_1(s)$$

و در نتیجه،

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = 1 + 2s$$

همچنین ولتاژ خروجی $V_2(s)$ برابر است با:

$$V_2(s) = 2s I_1(s)$$

$$z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = 2s$$

همچنین برای محاسبه $z_{12}(s)$ و $z_{22}(s)$ باید یک منبع جریان نابسته به قطب خروجی (سمت راست مدار) مطابق شکل (۱۰-۸-ج) متصل شود. در نتیجه با نوشتن رابطه KVL داریم:

$$V_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{3}s} \times I_2(s) + 2s I_2(s)$$

لذا،

$$z_{22}(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = \frac{1}{\frac{1}{3}s} + 2s$$

همچنین برای محاسبه $z_{12}(s)$ ولتاژ دو سر سلف را در این حالت محاسبه می‌کنیم. یعنی،

$$V_1(s) = 2s \cdot I_2(s)$$

$$z_{12}(s) = \frac{V_1(s)}{I_2(s)} = 2s$$

در نهایت ماتریس امپدانس $\mathbf{Z}(s)$ به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2s & 2s \\ 2s & \frac{3}{s} + 2s \end{bmatrix}$$

همان‌گونه که از این مثال هم مشخص است، برای تعیین پارامترهای امپدانس شبکه مذکور، باید حتماً یک قطب از شبکه در حالت مدار باز باشد. لذا به این پارامترها، پارامترهای امپدانس مدار باز^۱ نیز می‌گویند. همچنین در صورتی که $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ باشد آنگاه شبکه دو قطبی موردنظر را شبکه دو قطبی متقابل می‌گویند و ماتریس امپدانس آن را هم

^۱- Open Circuit Impedance Parameters

ماتریس امپدانس متقارن^۱ می‌نامند. به راحتی قابل اثبات است که چنانچه یک شبکه دو قطبی از المان‌های مقاومت، سلف، خازن، و ترانسفورماتورها تشکیل شده باشد آنگاه دو قطبی مذکور، حتماً یک شبکه متقابل خواهد بود.

- کاربرد دیگری از پارامترهای امپدانس یک شبکه دو قطبی

یکی از کاربردهای اساسی پارامترهای امپدانس یک شبکه دو قطبی، تعیین تابع انتقال ولتاژی یا جریانی است، که می‌توان این توابع را برحسب پارامترهای امپدانس تعیین نمود. بدین منظور، فرض کنید که بخواهیم تابع انتقال ولتاژی $\frac{V_1(s)}{V_2(s)}$ را در حالت مدار باز به دست آوریم. به عبارت دیگر، برای تعیین این تابع انتقال، باید $I_2(s) = 0$ باشد. لذا برای این شبکه دو قطبی داریم:

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) \quad (20-10)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s)$$

و در نتیجه با تقسیم این دو رابطه بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{z_{11}(s)}{z_{21}(s)} \quad (21-10)$$

به طور مشابه اگر بخواهیم تابع انتقال جریانی با اتصال کوتاه قطب خروجی یعنی $\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$ را محاسبه کنیم آنگاه می‌بینیم که باید شرط $V_2(s) = 0$ رعایت گردد. لذا معادله قطب خروجی شبکه دو قطبی موردنظر به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$0 = z_{21}(s) \cdot I_1(s) + z_{22}(s) \cdot I_2(s) \quad (22-10)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{-z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (23-10)$$

کاربرد دیگری که می‌توان با استفاده از پارامترهای امپدانس شبکه دو قطبی بیان نمود، محاسبه تابع امپدانس دیده شده از قطب ورودی با وجود اتصال کوتاه در قطب خروجی می‌باشد. در این حالت، روابط شبکه دو قطبی (۱۰-۱۲) را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$V_1(s) = z_{11}(s) \cdot I_1(s) + z_{12}(s) \cdot I_2(s) \quad (24-10)$$

$$0 = z_{21}(s) \cdot I_1(s) + z_{22}(s) \cdot I_2(s)$$

لذا با حذف $I_2(s)$ از دسته معادله اخیر، $\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$ برابر خواهد شد با:

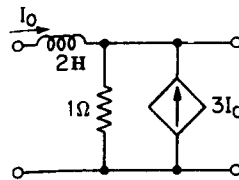
^۱- Symetric z-papameter Matrix

$$\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = z_{11}(s) - \frac{z_{12}(s) \cdot z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (۱۰-۲۵)$$

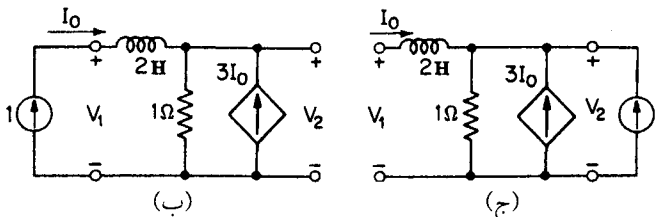
که این امپدانس، امپدانس اتصال کوتاه یک شبکه دو قطبی با اتصال کوتاه قطب خروجی است. حال اگر همین اتصالی در قطب ورودی صورت گیرد، آنگاه به طریق مشابه، امپدانس دو قطبی دیده شده از سرهای قطب خروجی برابر خواهد بود با:

$$\frac{V_2(s)}{I_2(s)} = z_{22}(s) - \frac{z_{21}(s) \cdot z_{12}(s)}{z_{11}(s)} \quad (۱۰-۲۶)$$

تمرین (۱۰-۲): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۰-۹-الف) موردنظر است. برای دو قطبی موردنظر، پارامترهای امپدانسی ماتریس امپدانس آن را بیابید. برای این منظور از شکل‌های (۱۰-۹-ب) و (۱۰-۹-ج) استفاده کنید.



(الف)



(ب)

(ج)

شکل (۱۰-۹): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۰-۲)

جواب:
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2s+4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

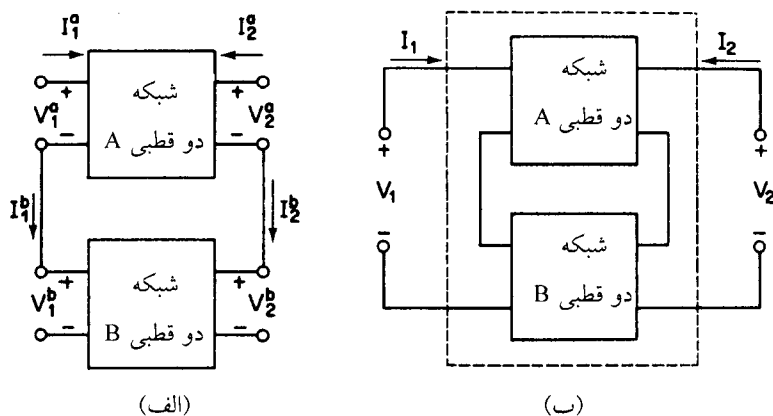
۱۰-۵- پارامترهای امپدانس در اتصال سری شبکه‌های دو قطبی

در بسیاری از مواقع، شبکه‌های دو قطبی متعددی به صورت سری و یا موازی به یکدیگر متصل می‌شوند. لذا باید بتوان ماتریس امپدانس کل شبکه را محاسبه نمود. برای این منظور، فرض کنید دو شبکه دو قطبی A و B با پارامترهای امپدانس $z_{ij}^a(s)$ و

$z_{ij}^b(s)$ وجود دارد که مطابق شکل (۱۰-۱۰-الف) به طور سری به یکدیگر متصل شده‌اند. بدین منظور، فرض کنید که معادلات این دو شبکه دو قطبی به صورت زیر باشند:

$$\mathbf{V}^a(s) = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_r^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{1r}^a(s) \\ z_{r1}^a(s) & z_{rr}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_r^a(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^a(s) \cdot \mathbf{I}^a(s) \quad (27-10)$$

$$\mathbf{V}^b(s) = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_r^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^b(s) & z_{1r}^b(s) \\ z_{r1}^b(s) & z_{rr}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_r^b(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^b(s) \cdot \mathbf{I}^b(s) \quad (28-10)$$



شکل (۱۰-۱۰): اتصال سری دو شبکه دو قطبی

اکنون می‌خواهیم ماتریس امپدانس شبکه دو قطبی معادل را که در شکل (۱۰-۱۰-ب) نشان داده شده است، محاسبه کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم ماتریس امپدانس شبکه دو قطبی منتهی شکل (۱۰-۱۰-ب) را به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{1r}(s) \\ z_{r1}(s) & z_{rr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_r(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s) \quad (29-10)$$

با توجه به خواص مدارهای سری، بردار ولتاژ و جریان شبکه دو قطبی معادل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^a(s) + V_1^b(s) \\ V_r^a(s) + V_r^b(s) \end{bmatrix} = \mathbf{V}^a(s) + \mathbf{V}^b(s) \quad (30-10)$$

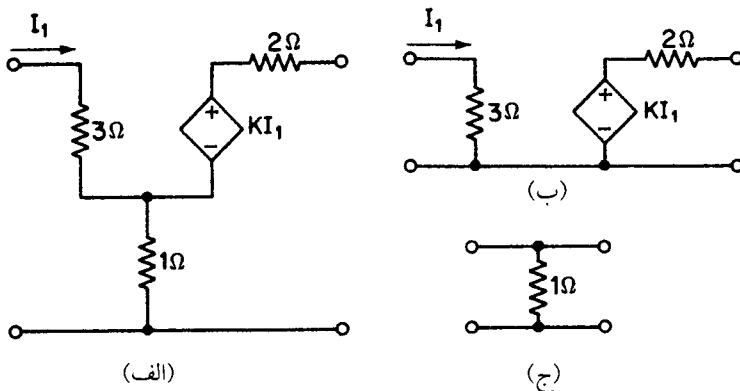
$$\mathbf{I}(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_r^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_r^b(s) \end{bmatrix} = \mathbf{I}^a(s) = \mathbf{I}^b(s) \quad (31-10)$$

با ترکیب روابط (۲۹-۱۰)، (۳۰-۱۰) و (۳۱-۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} V(s) &= V^a(s) + V^b(s) = Z^a(s).I^a(s) + Z^b(s).I^b(s) = \\ &= [Z^a(s) + Z^b(s)] I(s) = Z(s).I(s) \end{aligned} \quad (۳۲-۱۰)$$

از رابطه اخیر، نتیجه می‌گیریم که اگر دو شبکه دو قطبی مطابق شکل (۱۰-۱۰-الف) با یکدیگر سری شوند، آنگاه ماتریس امپدانس متوجه برای شبکه دو قطبی معادل، برابر مجموع ماتریس‌های امپدانس دو شبکه سری شده می‌باشد.

مثال (۳-۱۰): شکل (۱۰-۱۱-الف)، یک مدار الکتریکی با سه مقاومت و یک منبع ولتاژ وابسته را نشان می‌دهد. در صورتی که این شبکه را به دو شبکه (۱۰-۱۱-ب) و (۱۰-۱۱-ج) تقسیم کنیم، با استفاده از خاصیت سری بودن دو شبکه دو قطبی، ماتریس امپدانس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۱۱-الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۱۱): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۳-۱۰)

حل: برای شبکه ارائه شده در شکل (۱۰-۱۱-ب) ماتریس امپدانس شبکه برابر است با:

$$Z^a(s) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix}$$

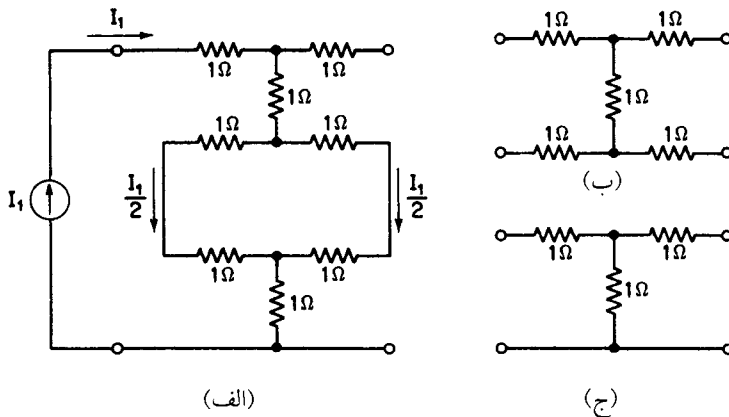
همچنین برای شبکه شکل (۱۰-۱۱-ج) خواهیم داشت:

$$Z^b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا با جمع دو ماتریس امپدانس $Z^a(s)$ و $Z^b(s)$ می‌توان نوشت:

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ k+1 & 3 \end{bmatrix}$$

تمرین (۳-۱۰): شبکه دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۱۲-الف) موردنظر است. با تقسیم شبکه مذکور به دو شبکه مطابق با شکل های (۱۰-۱۲-ب) و (۱۰-۱۲-ج) و با استفاده از خاصیت سری شدن شبکه های دو قطبی، ماتریس امپدانس شبکه شکل (۱۰-۱۲-الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۱۲): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۱۰)

جواب:
$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

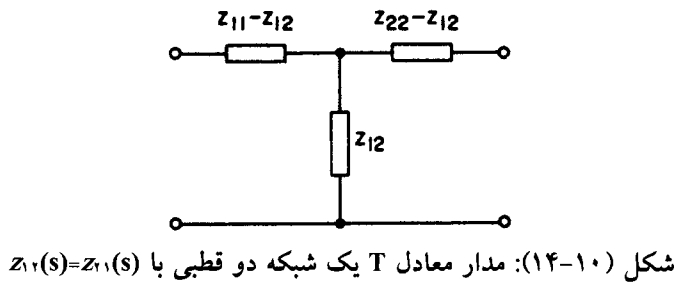
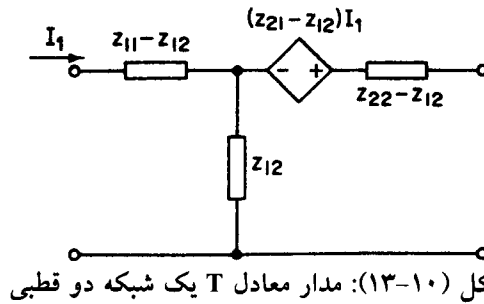
۱۰-۶- مدار معادل T یک شبکه دو قطبی

نوع دیگری از نمایش شبکه های دو قطبی، استفاده از مدار معادل T است. برای نمایش مدل T باید به روابط اساسی یک شبکه دو قطبی بازگردیم که این روابط به صورت زیر بودند:

$$v_1(s) = z_{11}(s) \cdot I_1(s) + z_{12}(s) \cdot I_2(s)$$

$$v_2(s) = z_{21}(s) \cdot I_1(s) + z_{22}(s) \cdot I_2(s)$$

حال برای نمایش این روابط به صورت مدار الکتریکی معادل شکل T، می توان به شکل (۱۰-۱۳) مراجعه نمود که دارای یک منبع ولتاژ وابسته می باشد. در صورتی که شبکه دو قطبی، به صورت یک شبکه دو قطبی متقابل باشد آنگاه $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ خواهد بود. در نتیجه، منبع ولتاژ وابسته حذف خواهد شد و شکل (۱۰-۱۴) حاصل می شود. این وضعیت، در شرایطی ایجاد می شود که شبکه دو قطبی از عناصر سلف، خازن، و مقاومت تشکیل شده باشد.

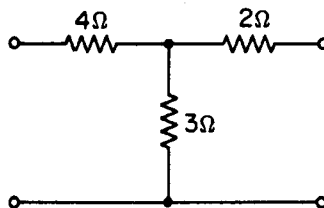


مثال (۱۰-۴): در صورتی که ماتریس امپدانس یک شبکه دو قطبی برابر رابطه زیر باشد:

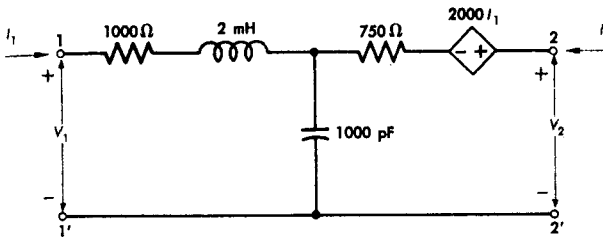
$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

آنگاه مدل T شبکه دو قطبی موردنظر را بیابید.

حل: با توجه به شکل (۱۰-۱۴) و با در نظر گرفتن اینکه $z_{12}(s) = z_{21}(s) = 3$ می‌باشد لذا مدل T شبکه دو قطبی با $\mathbf{Z}(s)$ مذکور به صورت شکل (۱۰-۱۵) خواهد بود.



تمرین (۱۰-۴): برای مدل T شبکه دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۱۶)، ماتریس امپدانس شبکه مذکور را بیابید. سرعت زاویه ای مدار برابر $\omega = 10^6 \text{ rad/sec}$ است.



شکل (۱۰-۱۶): مدل T شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۴)

جواب:
$$Z(s) = \begin{bmatrix} 1000 + j1000 & -j1000 \\ 2000 - j1000 & 750 - j1000 \end{bmatrix}$$

۱۰-۷- مدل شبکه دو قطبی با پارامترهای y

در جدول (۱۰-۱) شش حالت را برای ارتباط متغیرهای مستقل و وابسته و به منظور بیان روابط کلی یک شبکه دو قطبی بیان نمودیم. حالت دوم در این جدول، آن بود که ولتاژهای $V_1(s)$ و $V_2(s)$ به عنوان متغیرهای مستقل، و جریانهای $I_1(s)$ و $I_2(s)$ به عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شوند. در این حالت، پارامترهای شبکه $k_{ij}(s)$ به صورت پارامترهای ادمیتانس $y_{ij}(s)$ در می آیند و در نتیجه، معادلات این شبکه دو قطبی به شکل زیر در می آیند:

$$I_1(s) = y_{11}(s) \cdot V_1(s) + y_{12}(s) \cdot V_2(s) \quad (10-33)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) \cdot V_1(s) + y_{22}(s) \cdot V_2(s)$$

این دسته معادلات را می توان به شکل ماتریسی نیز نوشت. یعنی،

$$\mathbf{I}(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{V}(s) \quad (10-34)$$

که به ماتریس $\mathbf{Y}(s)$ ، ماتریس پارامترهای y می گویند.

حال مشابه ماتریس پارامترهای z می خواهیم ببینیم برای یک شبکه دو قطبی، پارامترهای $y_{11}(s)$ ، $y_{12}(s)$ ، $y_{21}(s)$ و $y_{22}(s)$ را چگونه محاسبه کنیم.

محاسبه $y_{11}(s)$ و $y_{21}(s)$: به منظور محاسبه $y_{11}(s)$ باید قطب خروجی شبکه، اتصال کوتاه شود تا ولتاژ $V_2(s) = 0$ گردد. حال با استفاده از یک منبع ولتاژ $V_1(s)$ در قطب ورودی و اندازه گیری جریانهای $I_1(s)$ و $I_2(s)$ می توان نوشت:

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (10-35)$$

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (10-36)$$

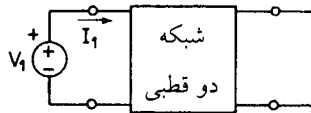
محاسبه $y_{12}(s)$ و $y_{22}(s)$: مشابه حالت قبل و برای محاسبه این دو پارامتر y ، یک منبع ولتاژ نابسته $V_1(s)$ به قطب خروجی شبکه دو قطبی موردنظر متصل شده و در همین حال، قطب ورودی آن اتصال کوتاه می‌شود تا شرط $V_1(s)=0$ برقرار گردد. در این حالت، با توجه به معادلات شبکه دو قطبی بر اساس ماتریس ادمیتانس، مقادیر $y_{12}(s)$ و $y_{22}(s)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$y_{12}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (10-37)$$

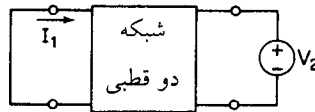
$$y_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (10-38)$$

نحوه محاسبه این چهار پارامتر ماتریس ادمیتانس را می‌توان به‌طور شماتیک در شکل (۱۷-۱۰) مشاهده نمود.

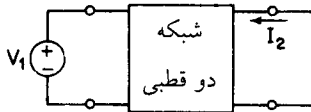
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$



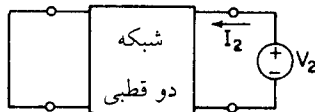
$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$



$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

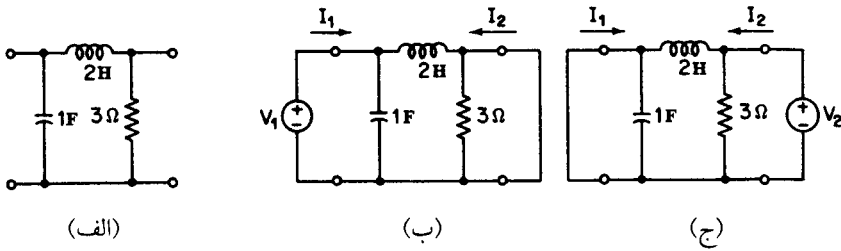


$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$



شکل (۱۷-۱۰): نحوه محاسبه پارامترهای ماتریس ادمیتانس Y

مثال (۱۰-۵): در شبکه دو قطبی شکل (۱۸-۱۰-الف) ماتریس ادمیتانس شبکه را محاسبه نمایید.



شکل (۱۸-۱۰): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۵-۱۰)

حل: به منظور تعیین $y_{11}(s)$ و $y_{21}(s)$ ، منبع ولتاژ $V_1(s)$ به قطب ورودی متصل می‌کنیم و قطب خروجی، اتصال کوتاه می‌گردد که در شکل (۱۸-۱۰-ب) نشان داده شده است. در نتیجه با استفاده از معادلات KCL می‌توان نوشت:

$$I_1(s) = sV_1(s) + \frac{1}{2s}V_1(s)$$

$$y_{11}(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{2s^2 + 1}{2s}$$

همچنین،

$$I_2(s) = -\frac{1}{2s}V_1(s)$$

$$y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-1}{2s}$$

از طرف دیگر برای محاسبه $y_{12}(s)$ و $y_{22}(s)$ ، باید قطب ورودی، اتصال کوتاه شده و منبع ولتاژ ناپسته $V_2(s)$ به قطب خروجی متصل گردد. لذا در این حالت و بر اساس شکل (۱۸-۱۰-ج) خواهیم داشت:

$$I_2(s) = \frac{V_2(s)}{3} + \frac{V_2(s)}{2s}$$

$$y_{22}(s) = \frac{I_2(s)}{V_2(s)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2s} = \frac{2s + 3}{6s}$$

از طرف دیگر،

$$I_1(s) = -\frac{V_2(s)}{2s}$$

و در نتیجه،

$$y_{12}(s) = \frac{I_1(s)}{V_2(s)} = \frac{-1}{2s}$$

در نهایت، ماتریس ادمیتانس Y به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 1}{2s} & \frac{-1}{2s} \\ \frac{-1}{2s} & \frac{2s + 3}{6s} \end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب ارائه شده و با در نظر گرفتن مثال اخیر در می‌یابیم که حتماً باید یکی از قطب‌های شبکه در حال اتصال کوتاه باشد. لذا به این پارامترها، پارامترهای ادمیتانسی اتصال کوتاه^۱ نیز گفته می‌شود. بعلاوه در صورتی که $y_{12}(s) = y_{21}(s)$ باشد، آنگاه شبکه دو قطبی مذکور را شبکه دو قطبی متقابل می‌نامند و ماتریس ادمیتانس آن را هم ماتریس ادمیتانس متقارن^۲ می‌گویند. به راحتی می‌توان اثبات نمود که چنانچه یک شبکه دو قطبی از عناصر مقاومت، سلف، خازن و ترانسفورماتورها تشکیل شده باشد آنگاه دو قطبی موردنظر حتماً به صورت یک شبکه دو قطبی متقابل است.

- کاربرد دیگری از پارامترهای ادمیتانس یک شبکه دو قطبی

مشابه پارامترهای امپدانسی یک شبکه دو قطبی، یکی از کاربردهای پارامترهای y ، تعیین توابع انتقال ولتاژی یا جریانی برحسب پارامترهای ادمیتانسی می‌باشد. بدین منظور، فرض کنید که بخواهیم تابع انتقال جریانی $\frac{I_1(s)}{I_2(s)}$ را در حالت اتصال کوتاه محاسبه نماییم. به عبارت دیگر، فرض می‌شود که $V_2(s) = 0$ باشد. لذا برای دو قطبی موردنظر می‌توان نوشت:

$$I_1(s) = y_{11}(s) \cdot V_1(s) \quad (37-10)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) \cdot V_1(s)$$

و با تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{I_1(s)}{I_2(s)} = \frac{y_{11}(s)}{y_{21}(s)} \quad (38-10)$$

حال اگر بخواهیم تابع انتقال ولتاژ را با شرط اتصال باز بودن قطب خروجی (یعنی $I_2(s) = 0$) محاسبه کنیم آنگاه معادله قطب خروجی شبکه موردنظر برابر خواهد بود با:

$$0 = y_{21}(s) \cdot V_1(s) + y_{22}(s) \cdot V_2(s) \quad (39-10)$$

در نتیجه، نسبت $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ، برابر رابطه زیر خواهد بود:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (40-10)$$

¹- Short Circuit Admittance Parameters

²- Symmetric y-Parameter Matrix

کاربرد دیگری که از ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانس شبکه‌های دو قطبی می‌توان بیان نمود، ارتباط این دو ماتریس با یکدیگر و نحوه محاسبه هر کدام با استفاده از دیگری می‌باشد. بدین منظور، برای یک دو شبکه قطبی داریم:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s) \quad (41-10)$$

اما با استفاده از پارامترهای ادمیتانس می‌دانیم که،

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{V}(s) \quad (42-10)$$

با جایگزینی رابطه (42-10) در (41-10) خواهیم داشت:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s) \mathbf{Y}(s) \mathbf{V}(s) \quad (43-10)$$

که از این رابطه در می‌یابیم که حاصل ضرب ماتریس ادمیتانس و امپدانس با یکدیگر برابر ماتریس واحد خواهد بود. لذا،

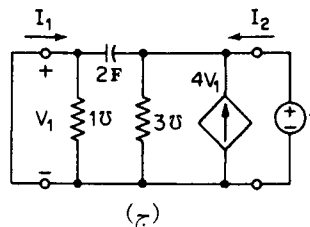
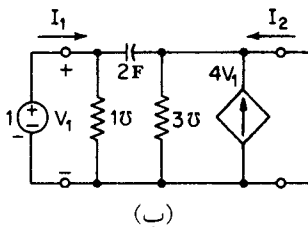
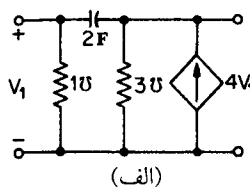
$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Y}^{-1}(s), \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) \quad (44-10)$$

در نتیجه پارامترهای z_{ij} و y_{ij} را می‌توان به صورت زیر بر حسب هم محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}(s)} \begin{bmatrix} z_{22}(s) & -z_{12}(s) \\ -z_{21}(s) & z_{11}(s) \end{bmatrix} \quad (45-10)$$

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}(s)} \begin{bmatrix} y_{22}(s) & -y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & y_{11}(s) \end{bmatrix} \quad (46-10)$$

تمرین (5-10): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (10-19-الف)، ماتریس ادمیتانس شبکه دو قطبی مربوطه را بیابید. برای محاسبه پارامترهای y ، از شکل‌های (10-19-ب) و (10-19-ج) می‌توانید استفاده کنید.



شکل (10-19): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (5-10)

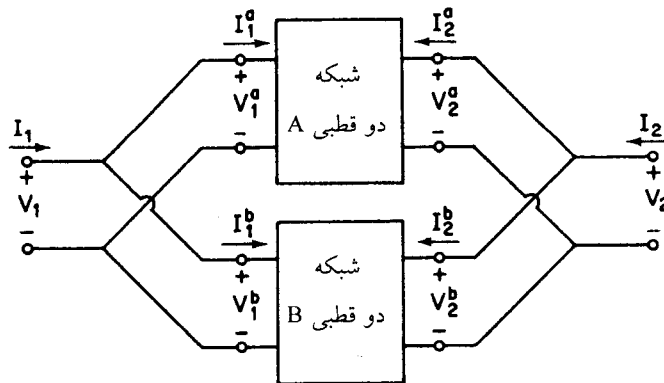
$$Y(s) = \begin{bmatrix} 2s+1 & -2s \\ -2s-4 & 2s+3 \end{bmatrix} \quad \text{جواب:}$$

۱۰-۸- پارامترهای ادمیتانس در اتصال موازی شبکه‌های دو قطبی

مشابه حالت سری در شبکه‌های دو قطبی، شرایطی ایجاد می‌شود که دو شبکه دو قطبی به شکل موازی با هم متصل گردند. لذا برای محاسبه روابط بین ولتاژ و جریان شبکه دو قطبی متوجه می‌توان از ماتریس‌های ادمیتانسی این دو شبکه استفاده نمود. بدین منظور فرض کنید که دو شبکه A و B مطابق شکل (۱۰-۲۰) با هم به‌طور موازی اتصال یابند که هر کدام از این دو شبکه، بترتیب دارای پارامترهای ادمیتانسی y_{ij}^a و y_{ij}^b می‌باشند. لذا معادلات این دو شبکه را به‌صورت زیر مدنظر قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{I}^a(s) = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^a(s) \cdot \mathbf{V}^a(s) \quad (47-10)$$

$$\mathbf{I}^b(s) = \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^b(s) & y_{12}^b(s) \\ y_{21}^b(s) & y_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^b(s) \cdot \mathbf{V}^b(s) \quad (48-10)$$



شکل (۱۰-۲۰): اتصال موازی دو شبکه دو قطبی

حال در صورتی که این دو شبکه با یکدیگر موازی باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$V_1(s) = V_1^a(s) = V_1^b(s) \quad , \quad V_2(s) = V_2^a(s) = V_2^b(s) \quad (49-10)$$

$$I_1(s) = I_1^a(s) + I_1^b(s) \quad , \quad I_2(s) = I_2^a(s) + I_2^b(s) \quad (50-10)$$

در نتیجه، اگر ماتریس ادمیتانس شبکه منتجه را با پارامترهای y_{ij} در نظر بگیریم آنگاه رابطه زیر برای این شبکه صادق خواهد بود:

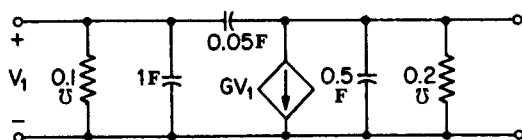
$$\mathbf{I}(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{V}(s) \quad (51-10)$$

که با توجه به خواص ارائه شده در روابط (۱۰-۴۹) و (۱۰-۵۰) نتیجه می گیریم که،

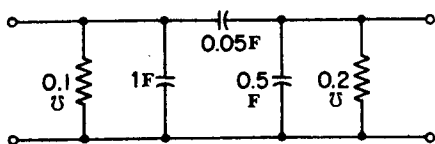
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}^a(s) + \mathbf{Y}^b(s) \quad (52-10)$$

از این رابطه در می یابیم که با موازی شدن دو شبکه دو قطبی، پارامترهای ادمیتانسی متناظر این دو شبکه با هم جمع می گردند.

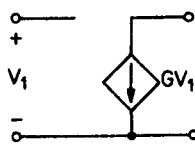
مثال (۱۰-۶): شکل (۱۰-۲۱-الف) یک شبکه دو قطبی را نشان می دهد که می توان این شبکه را به صورت حالت موازی دو شبکه ارائه شده در شکل های (۱۰-۲۱-ب) و (۱۰-۲۱-ج) در نظر گرفت. با استفاده از خواص شبکه های دو قطبی موازی، ماتریس ادمیتانس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۱-الف) را محاسبه نمایید.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۱۰-۲۱): شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۶) به همراه اتصال موازی دو شبکه مجزا

حل: با استفاده از قانون جریان KCL برای دو گره شبکه دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۲۱-ب) ماتریس ادمیتانس آن به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{Y}^a(s) = \begin{bmatrix} 1/0.5s + 0/1 & -0/0.5s \\ -0/0.5s & 0/0.5s + 0/2 \end{bmatrix}$$

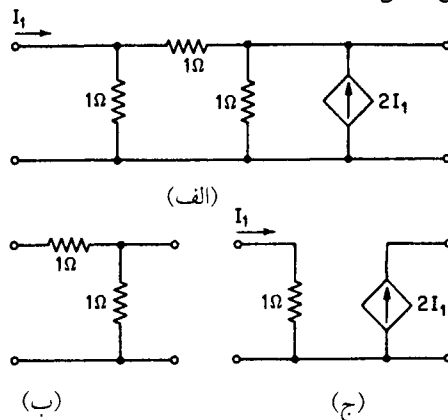
همچنین برای شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۱-ج) خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}^b(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، با توجه به موازی شدن دو شبکه A و B، ماتریس ادمیتانس شبکه شکل (۱۰-۲۱-الف) را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}^a(s) + \mathbf{Y}^b(s) = \begin{bmatrix} 1/0.5s + 0/1 & -0/0.5s \\ -0/0.5s + G & 0/0.5s + 0/2 \end{bmatrix}$$

تمرین (۱۰-۶): در شکل (۱۰-۲۲-الف)، با استفاده از ماتریس ادمیتانس شبکه‌های دو قطبی ارائه شده در شکل‌های (۱۰-۲۲-ب و ج) و موازی کردن این دو شبکه، ماتریس ادمیتانس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۲۲-الف) را بیابید.



شکل (۱۰-۲۲): شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۶) به همراه اتصال موازی دو شبکه مجزا

جواب:
$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

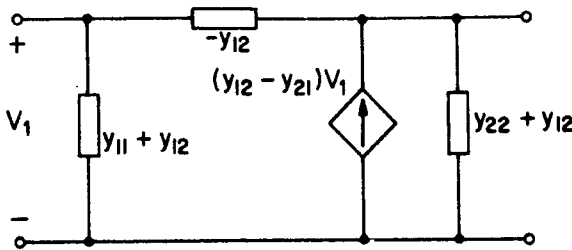
۱۰-۹- مدار معادل II یک شبکه دو قطبی

در بخش (۱۰-۶)، مدل T را برای نمایش یک شبکه دو قطبی با استفاده از پارامترهای شبکه بیان نمودیم. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از پارامترهای Y یک شبکه دو قطبی، مدل دیگری به نام مدل II را برای آن ارائه کنیم. برای رسیدن به این هدف، ابتدا روابط اساسی یک شبکه دو قطبی را براساس پارامترهای Y دوباره بازنویسی می‌کنیم:

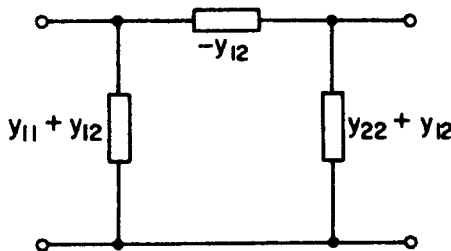
$$I_1(s) = y_{11}(s) \cdot V_1(s) + y_{12}(s) \cdot V_2(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) \cdot V_1(s) + y_{22}(s) \cdot V_2(s)$$

حال اگر بخواهیم این روابط را به صورت یک مدار الکتریکی معادل شکل II نشان دهیم، می توان به شکل (۲۳-۱۰) مراجعه نمود که از سه ادیتانس و یک منبع جریان وابسته تشکیل شده است. معادلات این شبکه، دقیقاً مطابق با معادلات فوق می باشد. حال اگر شبکه به صورت یک شبکه دو قطبی متقابل باشد، آنگاه با شرط $y_{12}(s) = y_{21}(s)$ ، منبع جریان وابسته حذف شده و شکل (۲۳-۱۰) به شکل (۲۴-۱۰) تبدیل می شود. این وضعیت در مواقعی اتفاق می افتد که شبکه مورد نظر، از عناصر سلف، خازن و مقاومت تشکیل شده باشد.



شکل (۲۳-۱۰): مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی



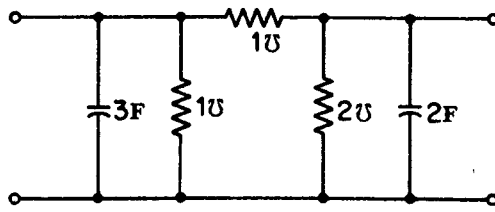
شکل (۲۴-۱۰): مدار معادل Π یک شبکه دو قطبی با $y_{12}(s) = y_{21}(s)$

مثال (۷-۱۰): ماتریس ادیتانس یک شبکه دو قطبی به قرار زیر می باشد:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 3s+2 & -1 \\ -1 & 2s+3 \end{bmatrix}$$

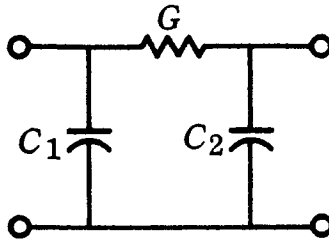
حال عناصر شبکه دو قطبی مورد نظر را رسم کنید.

حل: با توجه به آنکه در ماتریس ادیتانس ارائه شده، شرط $y_{12}(s) = y_{21}(s)$ برقرار می باشد لذا شبکه به صورت یک شبکه متقابل خواهد بود که مدل Π آن به صورت شکل (۲۴-۱۰) خواهد بود که در شکل (۲۵-۱۰) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۲۵): مدل Π شبکه دو قطبی مربوط به مثال (۱۰-۷)

تمرین (۱۰-۷): برای مدل Π شبکه دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۲۶)، ماتریس ادمیتانس شبکه مذکور را بیابید.



شکل (۱۰-۲۶): مدل Π شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۷)

$$Y(s) = \begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & sC_2 + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad \text{جواب:}$$

۱۰-۱۰- مدل شبکه‌های دو قطبی با پارامترهای هایبرید

در بخش‌های قبلی، ماتریس امپدانسی Z و ماتریس ادمیتانسی Y را بیان نمودیم که به ترتیب بیانگر حالت‌های اول و دوم از جدول (۱۰-۱) می‌باشند. در ماتریس امپدانس، جریان‌های $I_1(s)$ و $I_2(s)$ به عنوان متغیرهای مستقل، و ولتاژهای $V_1(s)$ و $V_2(s)$ به عنوان متغیرهای وابسته بودند. این در حالی است که در ماتریس ادمیتانس، متغیرهای $V_1(s)$ و $V_2(s)$ به عنوان متغیرهای مستقل، و متغیرهای $I_1(s)$ و $I_2(s)$ متغیرهای وابسته بودند. در این بخش می‌خواهیم حالت سوم و چهارم از جدول (۱۰-۱) را بیان کنیم که در این دو حالت، متغیرهای مستقل، ترکیبی از جریان و ولتاژ قطب‌های خروجی و ورودی می‌باشند.

۱۰-۱-۱-۱۰- ماتریس هایبرید G

هنگامی که ولتاژ یک قطب و جریان قطب دیگر به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب گردند، ماتریس هایبرید^۱ توصیف می گردد. در صورتی که این متغیرهای مستقل، متغیرهای $V_1(s)$ و $I_2(s)$ باشند، آنگاه با استفاده از قضیه جمع آثار، دو متغیر وابسته $V_2(s)$ و $I_1(s)$ را می توان به شکل زیر تعریف نمود:

$$I_1(s) = g_{11}(s) \cdot V_1(s) + g_{12}(s) \cdot I_2(s) \quad (53-10)$$

$$V_2(s) = g_{21}(s) \cdot V_1(s) + g_{22}(s) \cdot I_2(s)$$

این وضعیت، حالت سوم از جدول (۱۰-۱) را مشخص می کند. در صورتی که دسته معادلات اخیر را به صورت ماتریسی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (54-10)$$

ماتریس G به عنوان ماتریس هایبرید، به صورت زیر تعریف می شود:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (55-10)$$

به دست آوردن تعبیرهای فیزیکی پارامترهای g_{ij} مانند حالت های امپدانس و ادمیتانس، بسیار راحت است. در روابط زیر، این تعبیرهای فیزیکی به همراه ارتباط آنان با اعضاء ماتریس امپدانس و ادمیتانس بیان شده است:

$$g_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = \frac{1}{z_{11}(s)} \quad (56-10)$$

$$g_{12}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} \quad (57-10)$$

$$g_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} \quad (58-10)$$

$$g_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = \frac{1}{y_{22}(s)} \quad (59-10)$$

لازم به ذکر است که $g_{11}(s)$ دارای بعد ادمیتانس، $g_{12}(s)$ نسبت انتقال جریان معکوس، $g_{21}(s)$ نسبت انتقال ولتاژ مستقیم، و $g_{22}(s)$ دارای بعد امپدانس است. در شکل (۱۰-۲۷) نحوه محاسبه فیزیکی این پارامترها نشان داده شده است. براساس روابط

^۱ - Hybrid Matrix

(۵۶-۱۰) تا (۵۹-۱۰)، پارامترهای $g_{11}(s)$ تا $g_{22}(s)$ را می‌توان برحسب پارامترهای ماتریس ادمیتانس به صورت زیر نمایش داد:

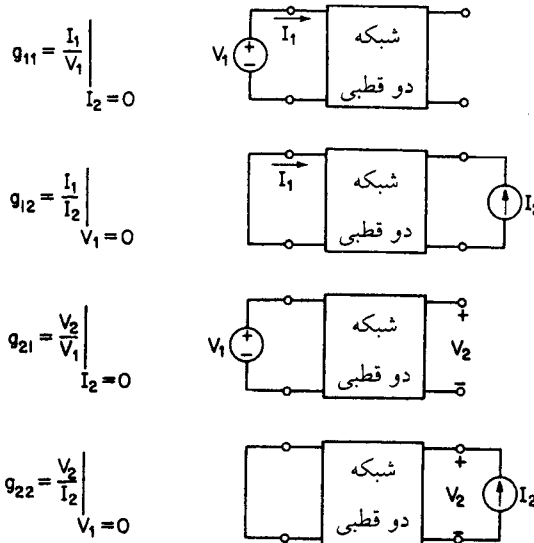
$$\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{22}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \det Y(s) & y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (۶۰-۱۰)$$

همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که،

$$\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{22}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \det G(s) & g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (۶۱-۱۰)$$

که در این رابطه $\det G(s) = g_{11}(s) \cdot g_{22}(s) - g_{12}(s) \cdot g_{21}(s)$ می‌باشد.

لازم به ذکر است که با توجه به رابطه (۶۰-۱۰) در می‌یابیم که برای یافتن ماتریس انتقال G ، حتماً باید $y_{22}(s) \neq 0$ باشد؛ به عبارت دیگر، در صورتی که ساختار شبکه دو قطبی به گونه‌ای باشد که $y_{22}(s) = 0$ باشد، آنگاه امکان بیان ماتریس $G(s)$ برای دو قطبی مذکور وجود ندارد. عکس این موضوع هم صادق است که از رابطه (۶۱-۱۰) قابل مشاهده است.



شکل (۱۰-۲۷): محاسبه فیزیکی پارامترهای ماتریس G

نوع دوم از ماتریس‌های هایبرید که بیانگر حالت چهارم از جدول (۱-۱۰) می‌باشد، آن است که متغیرهای $I_1(s)$ و $V_2(s)$ به عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای $V_1(s)$ و $I_2(s)$ به عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شوند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$V_1(s) = h_{11}(s) \cdot I_1(s) + h_{12}(s) \cdot V_2(s) \quad (۶۲-۱۰)$$

$$I_2(s) = h_{21}(s) \cdot I_1(s) + h_{22}(s) \cdot V_2(s)$$

که اگر دسته معادلات اخیر را به شکل ماتریسی بنویسیم داریم:

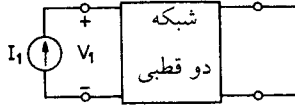
$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (۶۳-۱۰)$$

که به ماتریس $\mathbf{H}$ ، ماتریس با پارامترهای h می گویند. به راحتی می توان نشان داد که،

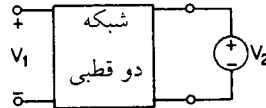
$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1} \quad (۶۴-۱۰)$$

نحوه محاسبه پارامترهای h در شکل (۲۸-۱۰) قابل مشاهده است. همچنین مدار معادل ماتریس های $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ بر پایه منابع کنترل شده در شکل (۲۹-۱۰) نشان داده شده است.

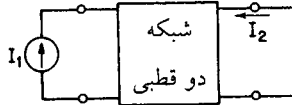
$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$



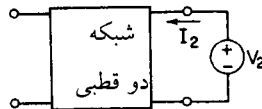
$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$



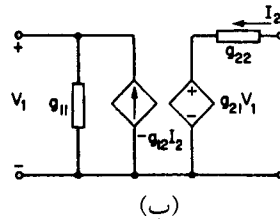
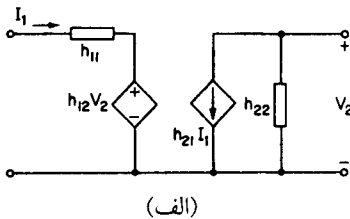
$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$



$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$



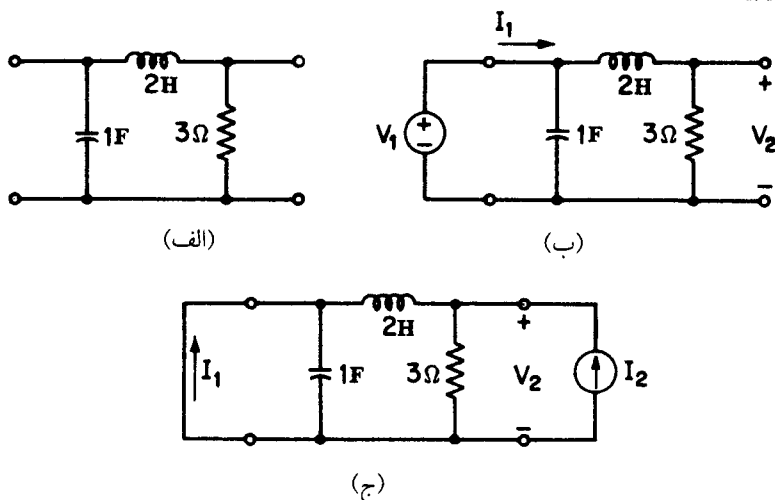
شکل (۲۸-۱۰): محاسبه فیزیکی پارامترهای ماتریس $\mathbf{H}$



شکل (۲۹-۱۰): مدار معادل یک شبکه دو قطبی: (الف) بر حسب پارامترهای $\mathbf{G}$ ؛ (ب)

بر حسب پارامترهای $\mathbf{H}$

مثال (۱۰-۸): برای مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۰-الف)، پارامترهای ماتریس G را بیابید.



شکل (۱۰-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۸)

حل: برای یافتن پارامترهای $g_{11}(s)$ و $g_{21}(s)$ از شبکه (۱۰-۳۰-ب) استفاده می‌شود؛ زیرا در محاسبه این پارامترها فرض می‌شود که $I_2(s) = 0$ می‌باشد. در این شبکه، با تزریق یک منبع ولتاژ به قطب ورودی (یعنی $V_1(s)$)، مقادیر $I_1(s)$ و $V_2(s)$ محاسبه می‌شود. در نتیجه، به راحتی می‌توان محاسبه نمود که،

$$g_{11}(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{2s^2 + 3s + 1}{2s + 3}$$

$$g_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{3}{2s + 3}$$

همچنین برای محاسبه $g_{12}(s)$ و $g_{22}(s)$ از مدار الکتریکی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۳۰-ج) استفاده می‌شود که با استفاده از روش محاسبه مدارهای الکتریکی خواهیم داشت:

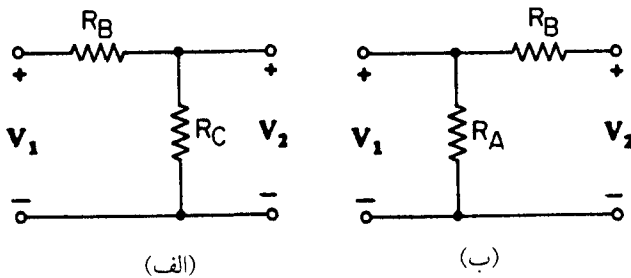
$$g_{12}(s) = \frac{-3}{2s + 3}$$

$$g_{22}(s) = \frac{6s}{2s + 3}$$

در نتیجه، ماتریس $G(s)$ به شکل زیر تکمیل می‌گردد:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 3s + 1}{2s + 3} & \frac{-3}{2s + 3} \\ \frac{3}{2s + 3} & \frac{6s}{2s + 3} \end{bmatrix}$$

تمرین (۸-۱۰): برای مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۱-۱۰) ماتریس هایبرید H را بیابید.



شکل (۳۱-۱۰): مدارهای الکتریکی مربوط به تمرین (۸-۱۰)

$$H(s) = \begin{bmatrix} R_B & 1 \\ -1 & \frac{1}{R_C} \end{bmatrix} \quad \text{(ب) } H(s) = \begin{bmatrix} \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} & \frac{R_A}{R_A + R_B} \\ \frac{-R_A}{R_A + R_B} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(جواب: الف)}$$

۱۰-۱۱- مدل شبکه های دو قطبی با پارامترهای انتقال

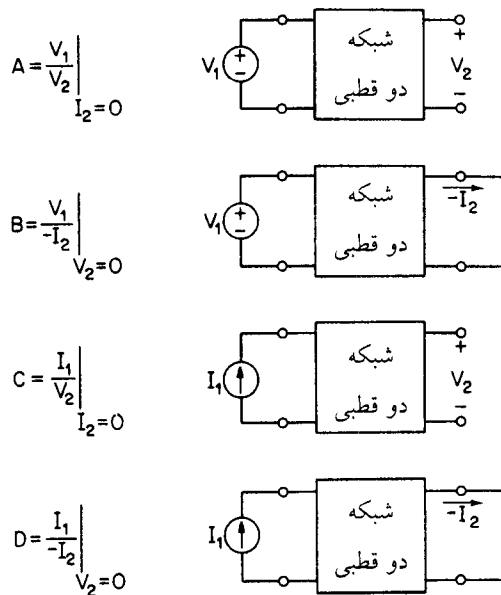
دو دسته دیگر از پارامترهای قراردادی یک شبکه دو قطبی، پارامترهای انتقال می باشند که حالت های پنجم و ششم از مجموعه شش حالت ارائه شده در جدول (۱-۱۰) می باشند. در حالت پنجم، متغیرهای قطب خروجی $V_2(s)$ و $-I_2(s)$ ، به عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای قطب ورودی به عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته می شوند. یعنی،

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶۵)$$

ماتریس انتقال T با پارامترهای ABCD به صورت زیر تعریف می شود:

$$T = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶۶)$$

لازم به ذکر است، با به کار بردن علامت منفی برای جریان $I_2(s)$ در رابطه (۱۰-۶۵)، جریانی که در قطب خروجی از آن قطب خارج می‌شود، به عنوان جریان مثبت در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای A ، B ، C و D به سادگی با پارامترهای امپدانس مدار باز و ادمیتانس مدار اتصال کوتاه مربوط می‌شوند که نحوه محاسبه آنان در شکل (۱۰-۳۲) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۳۲): نحوه محاسبه پارامترهای انتقال T

در حالت ششم از جدول (۱۰-۱)، متغیرهای قطب ورودی به عنوان متغیرهای مستقل، و متغیرهای قطب خروجی به عنوان متغیرهای وابسته هستند. یعنی،

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'(s) & B'(s) \\ C'(s) & D'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶۷)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۰-۶۵) و (۱۰-۶۷) در می‌یابیم که،

$$\mathbf{T}'^{\Delta} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \quad (۱۰-۶۸)$$

کاربرد عمده ماتریس انتقال، در پشت سر هم وصل کردن^۱ دو قطبی‌ها مثل شکل (۱۰-۳۳) می‌باشد. فرض کنید که ماتریس‌های انتقال دو قطبی‌های A و B به شکل زیر بیان شوند که

^۱ - Cascade Connection

پارامترهای شبکه **A** با پارامترهای $A^a(s)$ ، $B^a(s)$ ، $C^a(s)$ و $D^a(s)$ مشخص شوند و شبکه **B** با پارامترهای $A^b(s)$ ، $B^b(s)$ ، $C^b(s)$ و $D^b(s)$ مشخص گردند:

$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^a(s) \\ -I_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (۶۹-۱۰)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ I_1^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (۷۰-۱۰)$$

حال اگر قطب خروجی شبکه دو قطبی **A** به قطب ورودی شبکه دو قطبی **B** مطابق شکل (۳۳-۱۰) متصل شوند، آنگاه از ترکیب دو رابطه (۶۹-۱۰) و (۷۰-۱۰) می توان به ماتریس انتقال جدیدی رسید که از حاصل ضرب دو ماتریس انتقال **A** و **B** حاصل می شود،

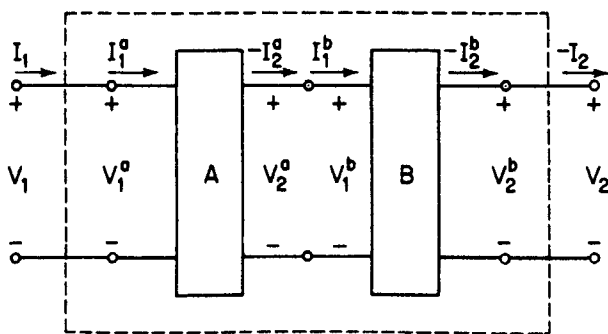
$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (۷۱-۱۰)$$

در نهایت، اگر مشخصات شبکه دو قطبی متجه را با مشخصات ورودی $V_1(s)$ و $I_1(s)$ و مشخصات خروجی $V_2(s)$ و $I_2(s)$ بیان کنیم آنگاه مشخصه شبکه دو قطبی متجه برابر خواهد بود با:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (۷۲-۱۰)$$

که،

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \quad (۷۳-۱۰)$$



شکل (۳۳-۱۰): اتصال پشت سر هم دو شبکه دو قطبی

بنابراین، ماتریس انتقال متجه دو شبکه دو قطبی که پشت سر هم، به هم متصل شده‌اند، از حاصل ضرب ماتریس‌های انتقال جداگانه آن دو قطبی‌ها حاصل می‌شود. سودمندی بسیار زیاد ماتریس انتقال، معلول همین خاصیت اخیر است. از این خاصیت در طرح سیستم‌های تلفنی، شبکه‌های میکروویو، رادارها و ... استفاده می‌شود.

لازم به ذکر است که بعضی از شبکه‌های دو قطبی، قسمت‌هایی از نمایش‌های ویژه یک شبکه دو قطبی را ندارند. به عنوان مثال، شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۳۴-الف) دارای نمایش ماتریس امپدانس نیست. در واقع، تمام عناصر z_{ij} ، بینهایت هستند؛ لیکن این دو قطبی دارای ماتریس ادمیتانس می‌باشد که به صورت زیر است:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} z^{-1} & -z^{-1} \\ -z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (10-74)$$

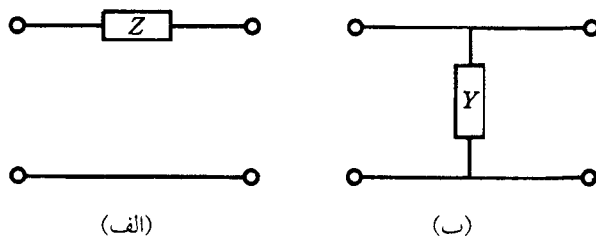
همچنین این شبکه دارای ماتریس انتقال به صورت زیر خواهد بود که از روابط ارائه شده در شکل (۱۰-۳۲) به دست می‌آید.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & z(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-75)$$

راه دیگر درک این موضوع که شبکه ارائه شده در شکل (۱۰-۳۴-الف) دارای ماتریس امپدانس Z نمی‌باشد آن است که $\det Y(s) = 0$ می‌باشد. لذا ماتریس ادمیتانس Y این شبکه دو قطبی، یک ماتریس ویژه مطابق رابطه (۱۰-۷۴) می‌باشد و از این رو، عکس ماتریس Y وجود ندارد؛ یعنی ماتریس Z برای این شبکه معنی نخواهد داشت.

حال اگر شبکه دو قطبی مشخص شده در شکل (۱۰-۳۴-ب) را مشاهده کنیم، می‌بینیم که برعکس شبکه دو قطبی شکل (۱۰-۳۴-الف)، این شبکه دارای نمایش ماتریس ادمیتانس Y نبوده و لیکن، دارای ماتریس امپدانس به شکل زیر خواهد بود:

$$Z(s) = \begin{bmatrix} y^{-1} & y^{-1} \\ y^{-1} & y^{-1} \end{bmatrix} \quad (10-76)$$

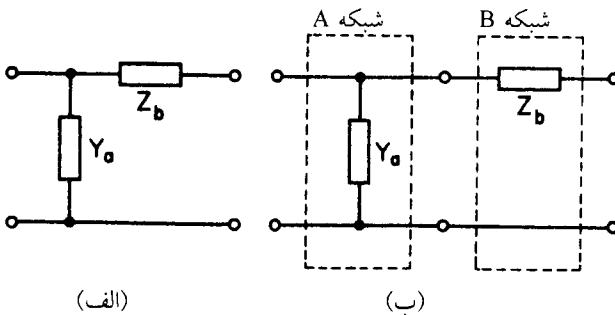


شکل (۱۰-۳۴): مثال‌هایی از شبکه‌های دو قطبی که نمایش یکی از ماتریس‌های Y یا Z را ندارند

همچنین این شبکه دارای ماتریس انتقال به صورت زیر خواهد بود که از روابط ارائه شده در شکل (۱۰-۳۲) محاسبه می گردند.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۷۷)$$

مثال (۱۰-۹): برای شبکه ارائه شده در شکل (۱۰-۳۵-الف)، ماتریس انتقال T را با استفاده از ماتریس های پشت سر هم بیابید.

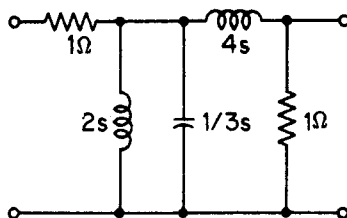


شکل (۱۰-۳۵): یک شبکه دو قطبی با دو عنصر Z_a و Y_a

حل: مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۰-۳۵-الف) را می توان به دو شبکه A و B به صورت شکل (۱۰-۳۵-ب) تقسیم نمود. ماتریس انتقال شبکه A را از رابطه (۱۰-۷۷) و ماتریس انتقال شبکه B را از رابطه (۱۰-۷۵) جایگزین می کنیم. لذا چون این دو شبکه به صورت پشت سر هم متصل شده اند، پس ماتریس انتقال شبکه متجه، برابر است با:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_a(s) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_b(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_b(s) \\ Y_a(s) & 1 + Y_a(s)Z_b(s) \end{bmatrix}$$

مثال (۱۰-۱۰): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۱۰-۳۶)، با استفاده از ماتریس های انتقال روابط (۱۰-۷۵) و (۱۰-۷۷)، ماتریس انتقال شبکه را به دست آورید.



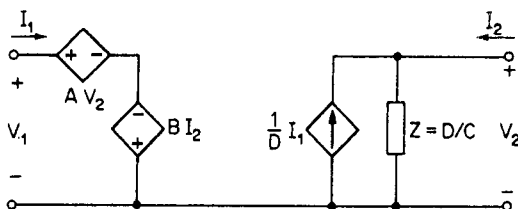
شکل (۱۰-۳۶): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۱۰)

حل: شبکه مذکور را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. شبکه اول از امپدانس سری $Z = 1\Omega$ ، شبکه دوم از امپدانس موازی $2s$ و $\frac{1}{3s}$ ، شبکه سوم از امپدانس سری $4s$ ، و شبکه چهارم از امپدانس موازی 1Ω تشکیل شده است. ماتریس انتقال شبکه‌های اول و سوم از رابطه (۷۵-۱۰) و ماتریس انتقال شبکه‌های دوم و چهارم از رابطه (۷۷-۱۰) به دست می‌آیند. با ضرب ماتریس‌های انتقال این چهار شبکه، ماتریس انتقال متوجه برابر است با:

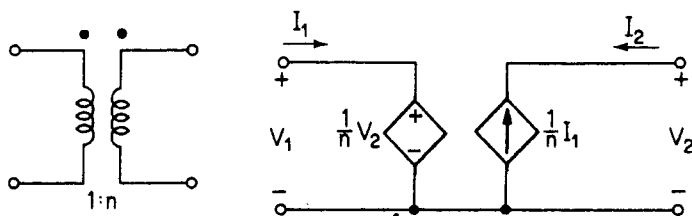
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6s^2+1} & 0 \\ \frac{2s}{2s} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{24s^3 + 14s^2 + 8s + 1}{2s} & \frac{24s^3 + 8s^2 + 6s}{2s} \\ \frac{24s^3 + 6s^2 + 6s + 1}{2s} & \frac{24s^3 + 6s}{2s} \end{bmatrix}$$

در انتهای این بخش می‌خواهیم ماتریس انتقال یک شبکه دو قطبی را به وسیله منابع کنترل شده و یک امپدانس مطابق شکل (۳۷-۱۰) نشان دهیم. با به کار بردن قوانین KVL در قطب ورودی و قوانین KCL در قطب خروجی، می‌توان به روابط اساسی ارائه شده در معادله (۶۵-۱۰) رسید. براساس همین شکل، می‌توان با نوشتن روابط یک ترانسفورماتور ایده‌آل را $(I_1(s) = -\frac{1}{n}I_2(s), V_2(s) = nV_1(s))$ مدل یک ترانسفورماتور ایده‌آل را به صورت یک دو قطبی مطابق شکل (۳۸-۱۰) نمایش داد.

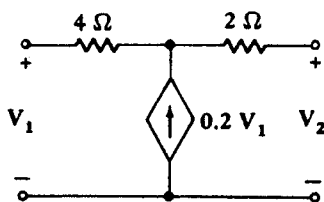


شکل (۳۷-۱۰): مدل یک شبکه دو قطبی براساس ماتریس انتقال و منابع کنترل شده



شکل (۳۸-۱۰): مدل یک ترانسفورماتور ایده‌آل با منابع کنترل شده

تمرین (۹-۱۰): ماتریس انتقال شبکه ارائه شده در شکل (۹-۱۰) را بیابید.



شکل (۹-۱۰): شبکه دو قطبی مربوط به تمرین (۹-۱۰)

جواب:
$$T = \begin{bmatrix} 0.556 & 3/33 \\ -0.1111 & 0.333 \end{bmatrix}$$

۱۰-۱۲- کاربردهایی از پارامترهای شبکه‌های دو قطبی

در بسیاری از کاربردهای عملی، یک شبکه دو قطبی از یک طرف (طرف قطب ورودی) به یک مولد و از طرف دیگر (طرف قطب خروجی) به یک بار مصرفی متصل می‌شود که در شکل (۱۰-۴۰) نشان داده شده است. در حالت کلی، این مولد به وسیله یک منبع ولتاژ $V_s(s)$ و یک امپدانس $Z_s(s)$ نمایش داده می‌شود و یک بار هم به صورت یک امپدانس $Z_L(s)$ بیان می‌شود. در این کاربرد به دنبال آن هستیم که اولاً امپدانس نقطه تحریک در قطب ورودی یعنی $\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = Z_i(s)$ و خواص انتقال کلی دو قطبی با بار مصرفی، یعنی رابطه میان ولتاژ خروجی $V_2(s)$ با $V_s(s)$ را بیابیم. برای این منظور، فرض کنید که پارامترهای امپدانس مدار باز دو قطبی به صورت زیر است:

$$V_1(s) = z_{11}(s) \cdot I_1(s) + z_{12}(s) \cdot I_2(s) \quad (78-10)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s) \cdot I_1(s) + z_{22}(s) \cdot I_2(s)$$

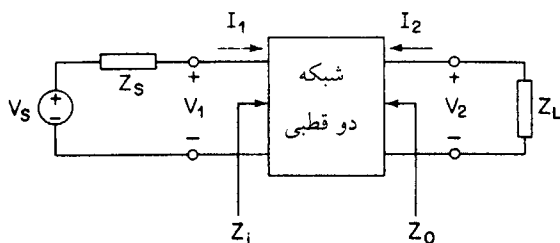
حال بار الکتریکی متصل شده و منبع ورودی، محدودیت‌هایی را به مشخصات قطب‌های ورودی و خروجی شبکه دو قطبی تحمیل می‌کند که این محدودیت‌ها برابرند با:

$$V_1(s) = V_s(s) - Z_s(s) \cdot I_1(s) \quad (79-10)$$

$$V_2(s) = -Z_L(s) \cdot I_2(s) \quad (80-10)$$

اکنون برای دستیابی به $\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = Z_i(s)$ کافی است که از روابط اخیر، متغیرهای $I_2(s)$ و $V_2(s)$ حذف گردند.

$$z_i(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = z_{11}(s) - \frac{z_{12}(s)z_{21}(s)}{z_{22}(s) + Z_L(s)} \quad (81-10)$$



شکل (۱۰-۴۰): یک شبکه دو قطبی با اتصال منبع و بار به آن

بعلاوه اگر بخواهیم $Z_i(s)$ را با استفاده از پارامترهای ادمیتانسی اتصال کوتاه شبکه دو قطبی محاسبه نماییم، می‌دانیم که،

$$I_1(s) = y_{11}(s) \cdot V_1(s) + y_{12}(s) \cdot V_2(s) \quad (۱۰-۸۲)$$

و با جایگزینی رابطه (۱۰-۸۰) در رابطه (۱۰-۸۲) داریم:

$$\frac{1}{Z_i(s)} = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = y_{11}(s) - \frac{y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s) + \frac{1}{Z_L(s)}} \quad (۱۰-۸۳)$$

و یا،

$$Z_i(s) = \frac{y_{22}(s) + Y_L(s)}{\det Y(s) + y_{11}(s)Y_L(s)} \quad (۱۰-۸۴)$$

در این رابطه، $Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)}$ و $\det Y_L(s)$ دترمینان ماتریس ادمیتانس است.

در کاربرد دیگر، اگر بخواهیم نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2(s)}{V_s(s)}$ را بیابیم، کافی است که در معادلات (۱۰-۷۸)، (۱۰-۷۹) و (۱۰-۸۰)، متغیرهای $I_1(s)$ ، $V_1(s)$ ، و $I_2(s)$ حذف گردند. با انجام این کار، به این نتیجه می‌رسیم که،

$$\frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{z_{21}(s) \cdot Z_L(s)}{[z_{11}(s) + Z_s(s)][z_{22}(s) + Z_L(s)] - z_{12}(s) \cdot z_{21}(s)} \quad (۱۰-۸۵)$$

بنابراین با داشتن پارامترهای امپدانس مدار باز یک دو قطبی، امپدانس‌های منبع و بار

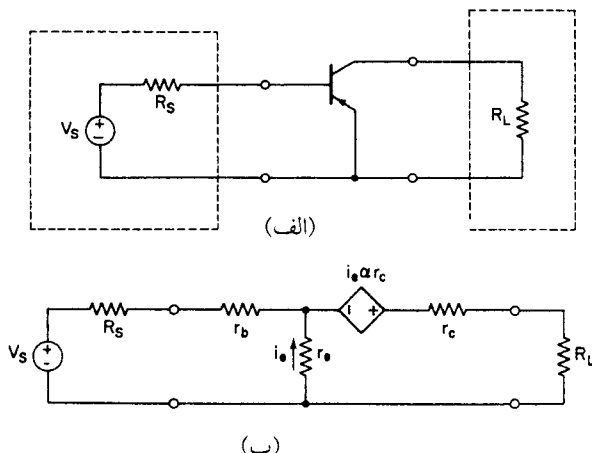
مصرفی آن، می‌توان امپدانس نقطه تحریک $Z_i(s)$ و نسبت انتقال ولتاژ کلی $\frac{V_2(s)}{V_s(s)}$ را

بترتیب از روابط (۱۰-۸۱ و ۸۴) و (۱۰-۸۵) محاسبه نمود.

مثال (۱۰-۱۱): در شکل (۱۰-۴۱ الف) یک مدار ترانزیستوری نشان داده است که از

قطب ورودی به یک منبع، و از قطب خروجی به یک بار مقاومتی R_L متصل شده است.

مدل T یک مدار ترانزیستوری مطابق شکل (۱۰-۴۱-ب) می باشد که پارامترهای Z آن به صورت زیر می باشد.



شکل (۱۰-۴۱): یک مدار ساده ترانزیستوری مربوط به مثال (۱۰-۱۱)

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} r_e + r_b & r_e \\ r_e - \alpha \cdot r_c & r_e + r_c(1 - \alpha) \end{bmatrix}$$

در این مدار، مطلوبست امپدانس نقطه تحریک دو قطبی و نسبت انتقال ولتاژ کلی سیستم.

حل: با استفاده از رابطه (۱۰-۸۱) مقدار امپدانس نقطه تحریک برابر است با:

$$Z_i(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = r_e + r_b - \frac{r_e(r_e - \alpha \cdot r_c)}{r_e + r_c(1 - \alpha) + R_L}$$

همچنین نسبت انتقال ولتاژ کلی با استفاده از رابطه (۱۰-۸۵) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{V_r(s)}{V_s(s)} = \frac{r_e(r_e - \alpha \cdot r_c)R_L}{(r_e + r_b + R_L)(r_e + r_c(1 - \alpha) + R_L) - r_e(r_e - \alpha \cdot r_c)}$$

در انتهای این فصل، برای اینکه ارتباط پارامترهای ماتریس امپدانس $\mathbf{Z}$ ، ماتریس ادمیتانس $\mathbf{Y}$ ، ماتریس های هایبرید $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ ، و ماتریس های انتقال $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}'$ را به شکل وضوحی بیان کنیم، این روابط را به طور یکجا و خلاصه در جدول (۱۰-۲) آورده شده است. واضح است که ماتریس های هر ردیف، با هم یکی می باشند و برای تبدیل بین این ماتریس ها و پارامترهای آنها، می توان از روابط این جدول استفاده نمود.

جدول (۱۰-۲): ارتباط بین پارامترهای ماتریس‌های مختلف دو قطبی‌ها

	G	Y	Z	
Z	$\begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{11} & g_{11} \\ g_{21} & \det G \\ g_{11} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\det Y} & -\frac{y_{12}}{\det Y} \\ -\frac{y_{21}}{\det Y} & \frac{y_{11}}{\det Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	
Y	$\begin{bmatrix} \frac{\det G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ g_{22} & g_{22} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \\ g_{22} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\det Z} & -\frac{z_{12}}{\det Z} \\ -\frac{z_{21}}{\det Z} & \frac{z_{11}}{\det Z} \end{bmatrix}$	
G	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ y_{22} & y_{22} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & 1 \\ y_{22} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{11} & z_{11} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \det Z \\ z_{11} & z_{11} \end{bmatrix}$	
H	$\begin{bmatrix} \frac{g_{22}}{\det G} & -\frac{g_{12}}{\det G} \\ \det G & \det G \\ -\frac{g_{21}}{\det G} & \frac{g_{11}}{\det G} \\ \det G & \det G \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{11} & y_{11} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \det Y \\ y_{11} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ z_{22} & z_{12} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & 1 \\ z_{22} & z_{22} \end{bmatrix}$	
T	$\begin{bmatrix} 1 & g_{22} \\ g_{21} & g_{21} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\det G}{g_{21}} \\ g_{21} & g_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ y_{21} & y_{21} \\ \frac{\det Y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \\ y_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\det Z}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \end{bmatrix}$	
T'	$\begin{bmatrix} -\frac{\det G}{g_{12}} & \frac{g_{22}}{g_{12}} \\ g_{12} & g_{12} \\ \frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ g_{12} & g_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & \frac{1}{y_{12}} \\ y_{12} & y_{12} \\ \frac{\det Y}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \\ y_{12} & y_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & -\frac{\det Z}{z_{12}} \\ z_{12} & z_{12} \\ -1 & \frac{z_{11}}{z_{12}} \\ z_{12} & z_{12} \end{bmatrix}$	

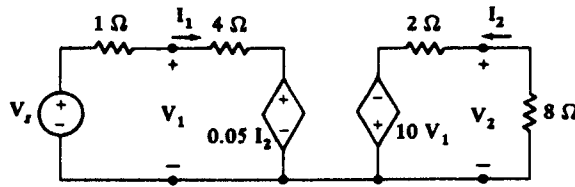
ادامه جدول (۱۰-۲): ارتباط بین پارامترهای ماتریس‌های مختلف دو قطبی‌ها

	T	T	H	
Z	$\begin{bmatrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\det A'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\det A}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{h_{22}}{h_{21}} & \frac{1}{h_{22}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{22}} & \frac{h_{22}}{h_{22}} \end{bmatrix}$	
Y	$\begin{bmatrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\det A'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\det A}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\det H}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{h_{11}}{h_{11}} \end{bmatrix}$	
G	$\begin{bmatrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\det A'}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{C}{A} & -\frac{\det A}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{h_{22}}{\det H} & -\frac{h_{12}}{\det H} \\ \frac{h_{21}}{\det H} & \frac{h_{11}}{\det H} \\ -\frac{h_{22}}{\det H} & \frac{h_{11}}{\det H} \end{bmatrix}$	
H	$\begin{bmatrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ \frac{\det A'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\det A}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	
T	$\begin{bmatrix} \frac{D'}{\det T'} & \frac{-B'}{\det T'} \\ -\frac{C'}{\det T'} & \frac{A'}{\det T'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\det H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{22}}{h_{21}} & \frac{1}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \end{bmatrix}$	
T'	$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{\det T} & \frac{-B}{\det T} \\ \frac{\det T}{-C} & \frac{\det T}{\det T} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{-h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{-h_{22}} & \frac{\det H}{h_{12}} \\ \frac{h_{12}}{h_{12}} & \frac{h_{12}}{h_{12}} \end{bmatrix}$	

تمرین (۱۰-۱۰): برای شبکه ارائه‌شده در شکل (۱۰-۴۲) که به یک منبع و یک بار 8Ω متصل شده است، مطلوبست: الف) تعیین ماتریس ادمیتانس Y ، ب) مقدار امپدانس

$$Z_{out}(s) = \frac{-V_2(s)}{I_2(s)}$$

دیده‌شده از قطب‌های خروجی شبکه به صورت



شکل (۱۰-۴۲): مدار دو قطبی مربوط به تمرین (۱۰-۱۰)

جواب: الف) $Y = \begin{bmatrix} 0.1875 & -0.625 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}$ ؛ ب) $Z_{out}(s) = 1/9 \Omega$

۱۰-۱۳- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این فصل، به دنبال تعریف و تحلیل انواع شبکه‌های دو قطبی بودیم. یک شبکه دو قطبی را به‌گونه‌ای تعریف کردیم که از یک قطب ورودی (با دو پایانه ورودی) و یک قطب خروجی (با دو پایانه خروجی) تشکیل شده است. خلاصه و نتیجه‌گیری این شبکه‌های دو قطبی را می‌توان به‌صورت موارد زیر بیان نمود:

- برای ارتباط دادن بین متغیرهای قطب‌های ورودی و خروجی (یعنی متغیرهای $V_1(s)$ ، $I_1(s)$ با $V_2(s)$ و $I_2(s)$) شش حالت وجود داشت که در جدول (۱۰-۱) به این ۶ حالت اشاره گردید. در حالت اول، شبکه دو قطبی براساس ماتریس با پارامترهای Z بیان گردید که به ماتریس امپدانس مدار باز معروف است. در حالت دوم، شبکه دو قطبی به‌وسیله ماتریس ادمیتانس Y مشخص شد که دارای پارامترهای y خواهد بود. این ماتریس را نیز ماتریس ادمیتانس مدار اتصال کوتاه نامیدیم. پارامترهای y_{ij} و z_{ij} به‌وسیله رابطه $Z = Y^{-1}$ و $Y = Z^{-1}$ با یکدیگر ارتباط دارند. لازم به‌ذکر است که برای بیان یک شبکه دو قطبی، عناصر شبکه به‌صورت خطی تغییرناپذیر با زمان خواهند بود.

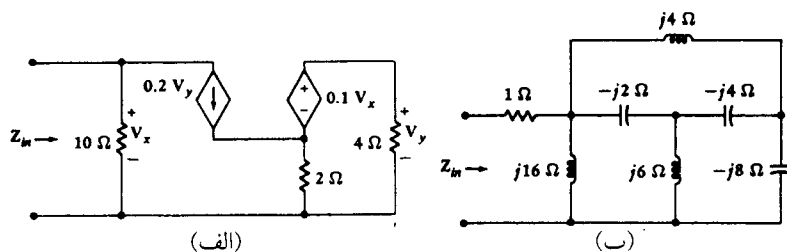
- حالت سوم و چهارم از نمایش شبکه‌های دو قطبی، براساس ماتریس هایبرید می‌باشد. در این حالت، متغیرهای مستقل، ولتاژ یک قطب و جریان قطب دیگر خواهد بود و بالطبع دو ولتاژ و جریان باقی مانده به‌عنوان متغیرهای وابسته قلمداد می‌شوند. با توجه به گزینه‌های انتخاب متغیرهای مستقل، دو حالت برای ماتریس‌های هایبرید ایجاد می‌شود. این دو ماتریس را به‌صورت ماتریس‌های هایبرید H و G بیان نمودیم که روابط $H = G^{-1}$ و $G = H^{-1}$ بین این دو ماتریس برقرار است.

- حالت پنجم و ششم در نمایش شبکه‌های دو قطبی بر اساس ماتریس انتقال می‌باشد. در این حالت، متغیرهای ولتاژ و جریان یک قطب به‌عنوان متغیرهای مستقل و متغیرهای قطب

دیگر به عنوان متغیرهای وابسته قلمداد می شود. لذا دو حالت وجود دارد: یک حالت آن است که متغیرهای قطب خروجی به عنوان متغیرهای مستقل باشند که به این ماتریس انتقال T گویند و برعکس اگر متغیرهای قطب ورودی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه ماتریس انتقال T' نامیده می شود. بین این دو ماتریس روابط $T = T'^{-1}$ و $T' = T^{-1}$ برقرار خواهد بود.

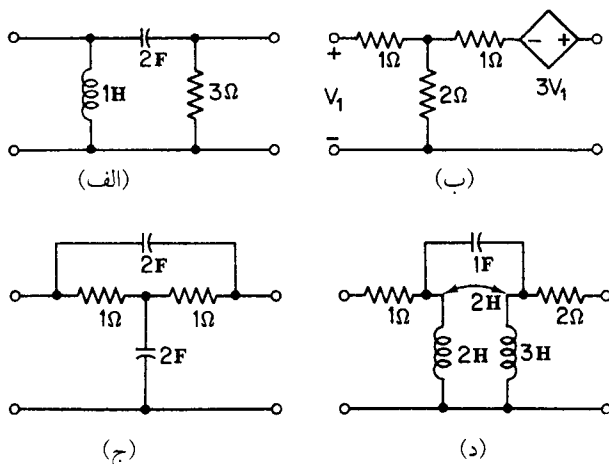
۱۰-۱۴- مسائل مروری

۱- با استفاده از مفاهیم شبکه های تک قطبی، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ را در مدارهای الکتریکی بکار رفته در شکل (۱۰-۴۳) بیابید.



شکل (۱۰-۴۳): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

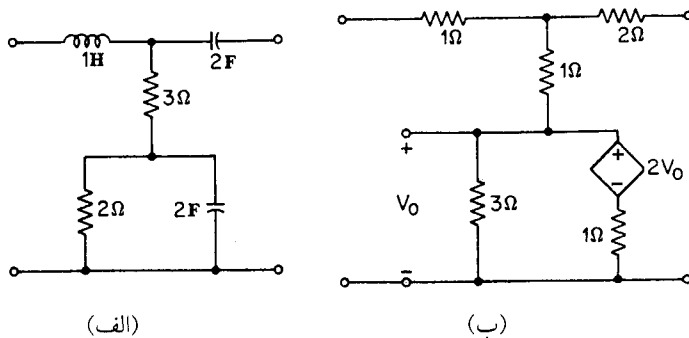
۲- پارامترهای Z و Y را در ماتریس های امپدانس و ادمیتانس مربوط به شبکه های دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۴۴) محاسبه کنید.



شکل (۱۰-۴۴): شبکه های دو قطبی مربوط به سؤال (۲)

۳- پارامترهای Z را برای شبکه‌های دو قطبی مشخص شده در شکل (۱۰-۴۵) به دو روش زیر محاسبه کنید:

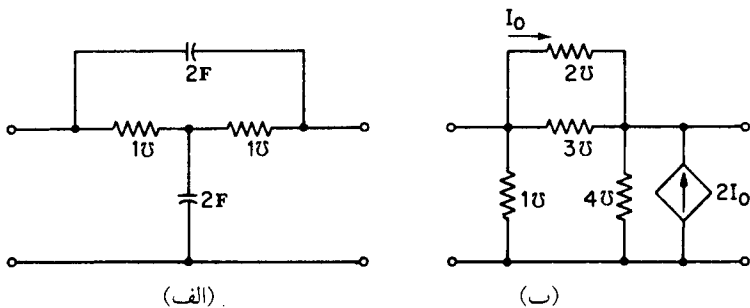
الف) با استفاده از روش شرایط تست و معادلات (۱۰-۱۶) تا (۱۰-۱۹)
ب) با تقسیم شبکه‌های مربوطه به دو شبکه مجزا که با یکدیگر سری شده باشند.



شکل (۱۰-۴۵): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۳)

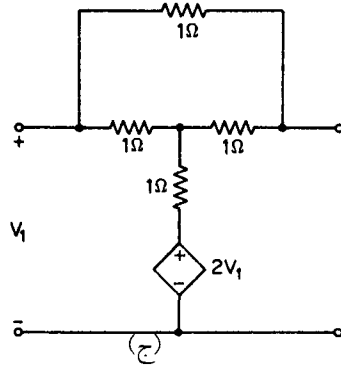
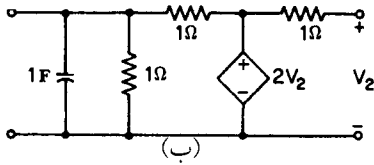
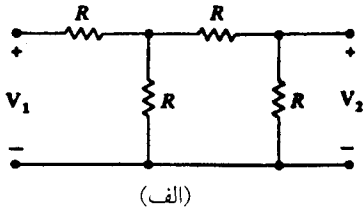
۴- پارامترهای Y را برای شبکه‌های دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۴۶) به دو روش زیر محاسبه نمایید:

الف) با استفاده از روش شرایط تست ارائه شده در معادلات (۱۰-۳۵) تا (۱۰-۳۸)
ب) با تقسیم شبکه‌های مربوطه به دو شبکه مجزا که با یکدیگر به‌طور موازی بسته شده باشند



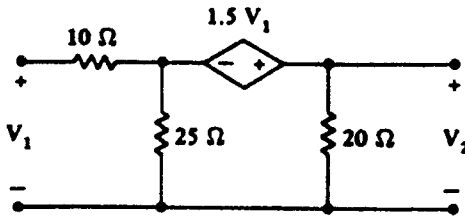
شکل (۱۰-۴۶): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۴)

۵- ماتریس‌های هایبرید H و G را برای شبکه‌های دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۴۷) بیابید.



شکل (۱۰-۴۷): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۵)

۶- شبکه‌های دو قطبی ارائه شده در شکل (۱۰-۴۸) موردنظر می‌باشند. برای این شبکه‌ها، ماتریس انتقال T را بیابید.



شکل (۱۰-۴۸): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۶)

۷- در صورتی که شبکه‌های دو قطبی به‌طور مجزا با ماتریس‌های زیر مشخص شوند، مطلوبست رسم شبکه‌های دو قطبی در هر حالت

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 20 & 0/3 \\ -4 & 0/1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

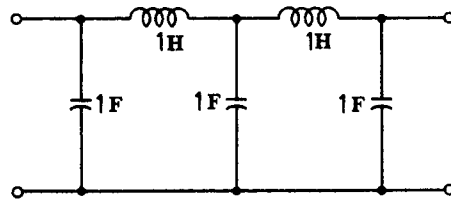
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 40 & 20 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{s} & -\frac{2}{s} \\ -\frac{2}{s} & 3 + \frac{2}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۸- برای شبکه دو قطبی مشخص شده در شکل (۱۰-۴۹) هدف آن است که ماتریس امپدانس $\mathbf{Z}$ را به دو روش مشخص نماییم:

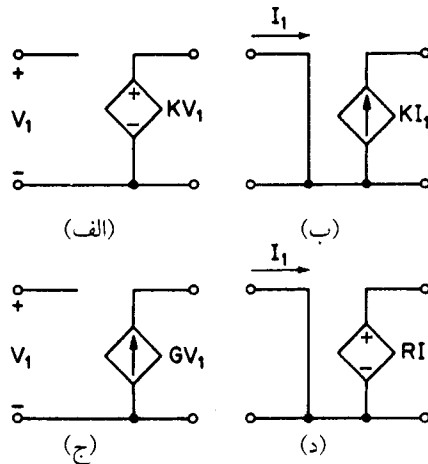
الف) ابتدا برای هر ۵ عضو این شبکه به‌طور مجزا، ماتریس امپدانس را به‌طور مجزا محاسبه کنید. سپس با پشت سر هم قرار گرفتن این ۵ شبکه، به ماتریس امپدانس منتجه برسید.

ب) صحت جواب خود را در قسمت (الف) با استفاده از روش تست به‌طور مستقیم و با استفاده از معادلات (۱۶-۱۰) تا (۱۹-۱۰) مورد ارزیابی قرار دهید.



شکل (۱۰-۴۹): شبکه دو قطبی مربوط به سؤال (۸)

۹- برای شبکه‌های دو قطبی ارائه‌شده در شکل (۱۰-۵۰)، تمام ماتریس‌های ممکنه را که قابل محاسبه هستند، به‌دست آورید.



شکل (۱۰-۵۰): شبکه‌های دو قطبی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- با استفاده از خواص شبکه‌های دو قطبی، نشان دهید که بین پارامترهای Y_a ، Y_b ، و Y_c از مدار ارائه شده در شکل (۱۰-۵۱-الف) با پارامترهای Y_{ab} ، Y_{bc} ، و Y_{ca} از مدار شکل (۱۰-۵۱-ب) باید روابط زیر برقرار می‌باشند تا دو شبکه با هم معادل و هم ارز باشند.

$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

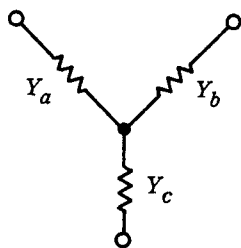
$$Y_{bc} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

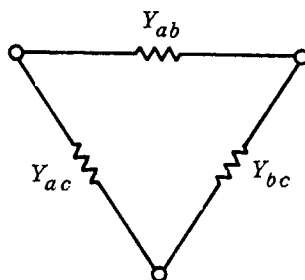
$$Y_a = \frac{Y_{ab} Y_{bc} + Y_{bc} Y_{ca} + Y_{ca} Y_{ab}}{Y_{bc}}$$

$$Y_b = \frac{Y_{ab} Y_{bc} + Y_{bc} Y_{ca} + Y_{ca} Y_{ab}}{Y_{ac}}$$

$$Y_c = \frac{Y_{ab} Y_{bc} + Y_{bc} Y_{ca} + Y_{ca} Y_{ab}}{Y_{ca}}$$



(الف)



(ب)

شکل (۱۰-۵۱): شبکه‌های اتصال ستاره و مثلث مربوط به سؤال (۱۰)

راهنمایی: اتصال ستاره و مثلث را به صورت یک شبکه دو قطبی چهار سر در نظر بگیرید. به عبارت دیگر، یک گره به عنوان سر مشترک قطب ورودی و خروجی قرار می گیرد.

فصل یازدهم

سیستم‌های سه‌فاز متقارن

۱۱-۱- مقدمه

یکی از دلایل اساسی مطالعه حالت دائمی سینوسی مدارهای الکتریکی در فصل هفتم آن بود که بسیاری از مصارف خانگی و صنعتی از ولتاژ متناوب سینوسی استفاده می‌کردند. در آن فصل، به مفاهیم امواج متناوب سینوسی، پس‌فازی و پیش‌فازی موج، منابع ولتاژی و جریان‌ی سینوسی، مفهوم امپدانس اهمی، سلفی و خازنی در سیستم‌های متناوب پی بردیم. سپس روش حل این‌گونه مدارها را با ابزار بسیار مفید فازور ارائه نمودیم. دیدیم که روش‌های حلی که برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان صادق بودند، در این نوع شبکه‌ها با استفاده از خاصیت فازور براحتی قابل پیاده‌سازی است.

اما با توجه به آنکه قسمت اعظم بارهای الکتریکی در سیستم‌های قدرت را موتورهای با توان بالا تشکیل می‌دهند، لذا هم به دلایل اقتصادی و هم به دلایل فنی، استفاده از سیستم‌های تغذیه تک‌فاز برای تغذیه موتورها و بارهای با قدرت بالا وجود ندارد. لذا مناسب است که از سیستم‌های دیگری موسوم به سیستم‌های تغذیه سه‌فاز استفاده گردد. بالطبع، برای تولید انرژی به‌صورت سیستم سه‌فاز نیز نیاز به ژنراتورهای (مولدهای) سه‌فاز به‌جای مولدها و منابع تک‌فاز می‌باشد. در حقیقت، این سیستم‌های سه‌فاز به‌عنوان وجه غالب انتقال انرژی الکتریکی در سیستم‌های قدرت به‌حساب می‌آید.

بدین منظور، در این فصل برآنیم تا با توجه به اهمیت سیستم‌های سه‌فاز، آنها را مورد بحث و بررسی قرار دهیم. لذا ابتدا منابع سه‌فاز و بارهای سه‌فاز را به‌همراه انواع آنان مورد تحلیل قرار داده و خصوصیات آنها را بیان می‌کنیم. سپس به تحلیل الکتریکی مدارهای سه‌فاز خواهیم پرداخت.

۱۱-۲- منابع سه فاز

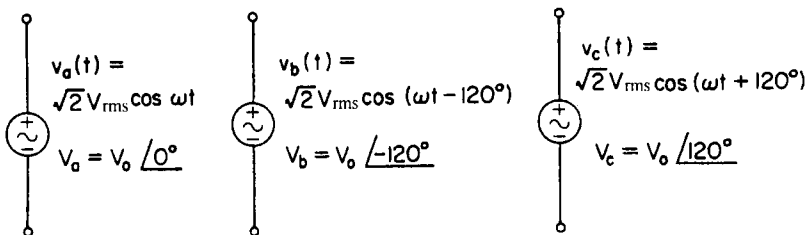
به منظور آنکه یک سیستم سه فاز الکتریکی را مورد بررسی قرار دهیم، ابتدا باید اجزاء آن را بیان نموده و خصوصیات آنها را تشریح کنیم. در هر سیستمی، ابتدا باید به تولید انرژی الکتریکی آن اشاره نمود، سپس نحوه انتقال انرژی و در نهایت، نحوه مصرف آن بررسی گردد. در نتیجه در سیستم‌های سه فاز نیز مبحث خود را از منابع سه فاز الکتریکی آغاز می‌کنیم.

همان‌گونه که از نام این منابع سه فاز مشخص است، آنها از سه منبع مجزا تشکیل شده اند که هر کدام، قادرند تا یک ولتاژ سینوسی متناوب را ایجاد کنند. در سیستم‌های قدرت، به این منابع، ژنراتورهای نیروگاهی می‌گویند. به عبارت دیگر، ژنراتورهای نیروگاهی دارای سه سیم‌پیچ مجزا بر روی استاتور^۱ خود هستند که این سه سیم‌پیچ بر روی محیط دایره‌ای استاتور واقع می‌شوند. هر کدام از این سه سیم‌پیچ‌ها را می‌توان به عنوان یک منبع سینوسی مد نظر قرار داد و با توجه به آنکه این سیم‌پیچ‌ها از نظر الکتریکی، ۱۲۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند، لذا این سه منبع از نظر زاویه‌ای با هم ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند. همچنین به خاطر یکسان بودن مشخصات این سه سیم‌پیچ، نتیجه می‌گیریم که دامنه ولتاژ تولیدی توسط هر کدام از سیم‌پیچ‌ها با هم برابر خواهند بود. لذا این سه منبع که در شکل (۱-۱۱) نشان داده شده اند را می‌توان به وسیله رابطه‌های زیر مشخص نمود:

$$v_a(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos \omega t \quad (1-11)$$

$$v_b(t) = \sqrt{2}V_{rms} (\cos \omega t - 120^\circ) \quad (2-11)$$

$$v_c(t) = \sqrt{2}V_{rms} (\cos \omega t - 240^\circ) \quad (3-11)$$

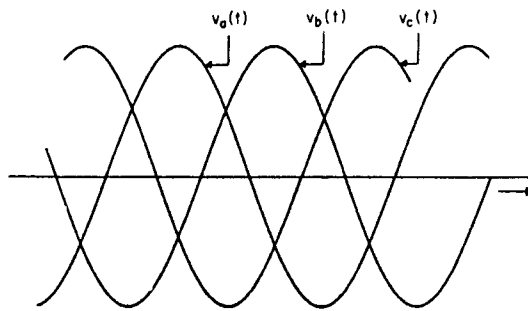


شکل (۱-۱۱): سه منبع سینوسی با اختلاف زاویه ۱۲۰ درجه

که در این روابط، ω سرعت زاویه‌ای منابع بر حسب rad/sec و V_{rms} ولتاژ مؤثر منابع بر حسب V می‌باشد. مشخص است که این سه ولتاژ با هم، ۱۲۰ درجه اختلاف دارند ولی

^۱ - Stator

دامنه ولتاژ این سه منبع، با هم برابر و به مقدار $\sqrt{3}V_{rms}$ می‌باشد. شکل زمانی این سه ولتاژ را می‌توان در شکل (۲-۱۱) مشاهده نمود. در این شکل، مشخص است که در لحظه‌ای که یکی از ولتاژ منابع، صفر است، دو منبع دیگر دارای ولتاژی برابر نصف مقدار دامنه خود خواهند بود. همچنین هیچ لحظه‌ای وجود ندارد که کل توان لحظه‌ای تولید شده توسط سه منبع، به یک مقدار ثابتی باشد. لازم به ذکر است که به این سه منبع، منبع سه‌فاز متعادل می‌نامند. به عبارت دیگر، منابع سه‌فازی متعادل هستند که: الف) دامنه ولتاژ آنها یکسان باشد؛ ب) اختلاف فاز آنها برابر ۱۲۰ درجه باشد؛ ج) مجموع جبری ولتاژ سه‌فاز در هر لحظه صفر باشد.



شکل (۲-۱۱): شکل موج سه‌فاز سینوسی

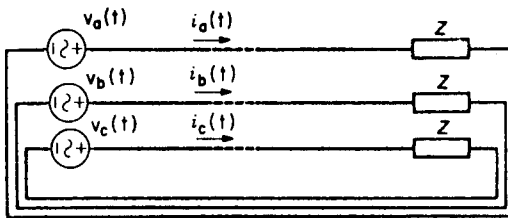
حال با استفاده از مفاهیم فازور ارائه‌شده در فصل هفتم، این سه ولتاژ سینوسی را می‌توان بر حسب فازورهای آنان به شکل زیر بیان نمود:

$$\vec{V}_a = V_{rms} \angle 0 \quad (۴-۱۱)$$

$$\vec{V}_b = V_{rms} \angle -۱۲۰ \quad (۵-۱۱)$$

$$\vec{V}_c = V_{rms} \angle -۲۴۰ = V_{rms} \angle ۱۲۰ \quad (۶-۱۱)$$

حال سؤالی که مطرح می‌شود آن است که انرژی این سه منبع چگونه منتقل می‌گردد؟ اگر انرژی هر کدام از این منابع بخواهد بر اساس شکل (۳-۱۱) به‌طور مستقل انتقال یابد به شش سیم نیاز می‌باشد که باعث افزایش هزینه خواهد بود. لذا سیستم سه‌فازی مطرح می‌شود که برای انتقال انرژی این سه منبع، فقط به سه سیم نیاز می‌باشد که هر سیم، به‌عنوان یک فاز در نظر گرفته می‌شود. پس برای آنکه یک منبع سه‌فاز ایجاد شود، شش سر مربوط به سه منبع ارائه‌شده در شکل (۱-۱۱) را چگونه می‌توان به سه‌فاز (یا سه سر) تبدیل نمود؟ برای این موضوع باید به اتصال منابع سه‌فاز به‌صورت اتصال ستاره و اتصال مثلث اشاره نمود.

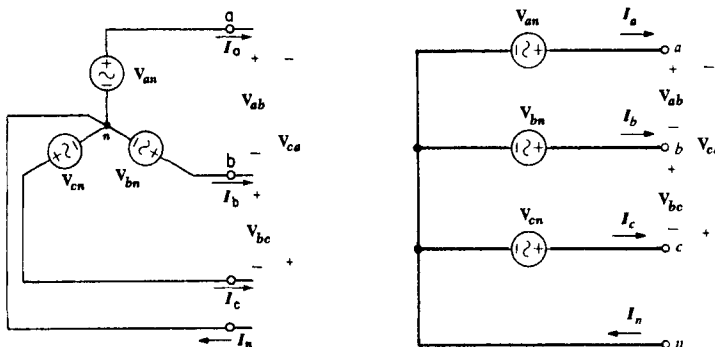


شکل (۱۱-۳): سیستم سه فاز با فازهای جداگانه

۱۱-۲-۱- اتصال ستاره منابع سه فاز

یکی از اتصالات سه منبع مجزا به یکدیگر، اتصال ستاره می‌باشد. در این حالت، سرهای منفی از سه منبع مجزا را به هم متصل کرده و سه سر دیگر را به‌عنوان سه سر خروجی از منابع بیرون می‌آوریم. این سه سر خروجی را فازهای a ، b ، و c می‌نامیم و سه سر دیگر را به‌عنوان مرکز ستاره و با n مشخص می‌کنیم. در نتیجه، ولتاژ سه منبع را به‌صورت $v_{an}(t)$ ، $v_{bn}(t)$ ، و $v_{cn}(t)$ نامیده و فازورهای آنان را به‌صورت $\vec{V}_{an}$ ، $\vec{V}_{bn}$ ، و $\vec{V}_{cn}$ نشان می‌دهیم. شکل اتصال ستاره منابع را می‌توان در (۱۱-۴) مشاهده نمود.

قبل از ادامه بحث در مورد اتصال ستاره، باید به مفاهیم متغیرهای فازی و خطی اشاره کنیم. همان‌گونه که از شکل (۱۱-۴) مشخص است، هر یک از منابع، دارای یک ولتاژ تولیدی و یک جریان عبوری از آن منبع است. به این ولتاژها و جریان‌ها که در ارتباط با هر کدام از منابع می‌باشند، به مشخصات فازی معروف هستند و با اندیس ph (به‌عنوان متغیر فازی^۱) نشان داده می‌شوند. مثلاً $\vec{V}_{anph}$ ، $\vec{V}_{bnph}$ ، و $\vec{V}_{cnph}$ به‌عنوان فازور



شکل (۱۱-۴): دو شکل نمایش از اتصال منابع سه فاز به‌صورت ستاره

^۱ - Phase Variable

ولتاژهای فاز، و جریان‌های $\bar{I}_{a\text{ph}}$ ، $\bar{I}_{b\text{ph}}$ و $\bar{I}_{c\text{ph}}$ به‌عنوان فازور جریان‌های فازي در نظر گرفته می‌شوند (در ادامه بحث و پس از مسلط شدن، دیگر از این زیرنویس‌ها هم استفاده نخواهیم کرد).

همچنین اگر معیار سنجش ولتاژ و جریان را در سرهای سه‌فاز a ، b و c خروجی از منبع سه‌فاز ستاره در نظر بگیریم، به متغیرهای جدیدی به‌نام متغیرهای خطی بر می‌خوریم. به عبارت دیگر، اگر فازور ولتاژ را بین سرهای a و b ، b و c و c و a در نظر بگیریم، به این ولتاژها، ولتاژهای خطی گفته می‌شود و با $\bar{V}_{abL}$ ، $\bar{V}_{bcL}$ و $\bar{V}_{caL}$ نشان می‌دهیم (زیرنویس L برای نشان دادن متغیر خطی^۱ است). همچنین اگر جریان‌های خروجی از فازهای a ، b و c را در نظر بگیریم به آنان جریان‌های سه‌فاز خطی گفته می‌شود و با $\bar{I}_{aL}$ ، $\bar{I}_{bL}$ و $\bar{I}_{cL}$ نشان می‌دهیم.

حال می‌خواهیم ارتباط ولتاژها و جریان‌های خطی و فازي را با یکدیگر بیان کنیم. همان‌گونه از شکل (۴-۱۱) مشخص است، جریان‌های فازي و خطی در اتصال ستاره با هم برابر می‌باشند. یعنی:

$$\bar{I}_{a\text{ph}} = \bar{I}_{aL} \quad (۷-۱۱)$$

$$\bar{I}_{b\text{ph}} = \bar{I}_{bL} \quad (۸-۱۱)$$

$$\bar{I}_{c\text{ph}} = \bar{I}_{cL} \quad (۹-۱۱)$$

اما برای محاسبه ولتاژهای خطی نسبت به ولتاژهای فازي از قانون KVL استفاده می‌شود. لذا بر اساس شکل (۴-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_{an} - \bar{V}_{bn} \quad (۱۰-۱۱)$$

$$\bar{V}_{bc} = \bar{V}_{bn} - \bar{V}_{cn} \quad (۱۲-۱۱)$$

$$\bar{V}_{ca} = \bar{V}_{cn} - \bar{V}_{an} \quad (۱۳-۱۱)$$

با توجه به مشخص بودن ولتاژهای $\bar{V}_{an}$ ، $\bar{V}_{bn}$ و $\bar{V}_{cn}$ بر اساس روابط (۴-۱۱) تا (۶-۱۱)، ولتاژهای خطی رابطه‌های فوق را می‌توان به‌شکل زیر محاسبه نمود:

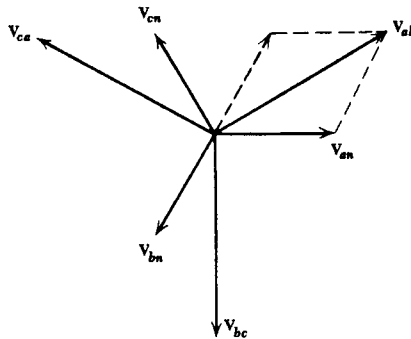
$$\bar{V}_{ab} = V_{rms} \angle 0 - V_{rms} \angle 120 = \sqrt{3} V_{rms} \angle 30 \quad (۱۳-۱۱)$$

$$\bar{V}_{bc} = V_{rms} \angle -120 - V_{rms} \angle -240 = \sqrt{3} V_{rms} \angle -90 \quad (۱۴-۱۱)$$

$$\bar{V}_{ca} = V_{rms} \angle -240 - V_{rms} \angle 0 = \sqrt{3} V_{rms} \angle 150 \quad (۱۵-۱۱)$$

به عبارت دیگر، می‌توان گفت که اندازه ولتاژهای خطی، $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژهای فازي است و زاویه ولتاژهای خطی، 30° درجه جلوتر از زاویه ولتاژهای فازي است. این موضوع را می‌توان در بردار ولتاژهای فازي و خطی ارائه‌شده در شکل (۵-۱۱) مشاهده نمود.

^۱ - Line Variable

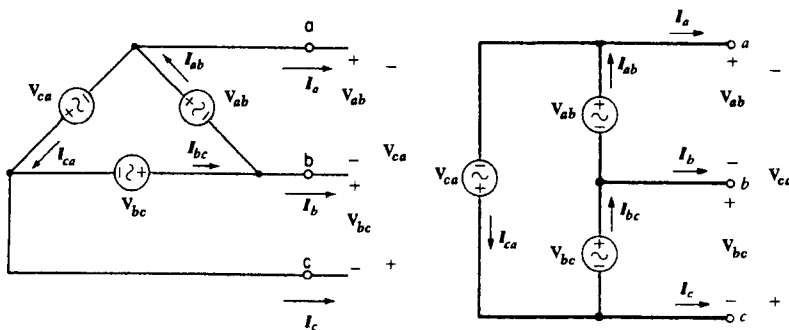


شکل (۱۱-۵): نمودار فازوری ولتاژهای خطی و فازی در اتصال ستاره

لازم به ذکر است که این سیستم سه فاز را، سیستم سه فاز با توالی abc می نامند؛ زیرا اختلاف زاویه فازهای a، b، و c به گونه ای است که ترتیب رسیدن هر یک از ولتاژ فازها به مقدار حداکثر خود، به ترتیب فازهای a، b، c، و ... می باشد. اینکه چگونه در عمل، چنین مجموعه ای از ولتاژها در ژنراتورهای نیروگاهی اتفاق می افتد، در ارتباط با جهت چرخش محور ژنراتورها و نامگذاری سیم پیچ ها می باشد.

۱۱-۲-۲- اتصال مثلث منابع سه فاز

نوع دیگری از اتصال سه منبع مجزا با یکدیگر، اتصال مثلث می باشد. در این حالت، سر و ته سه منبع، به طور متوالی به هم متصل شده و از نقاط اتصال، سه انشعاب که فازهای خروجی a، b، c را تشکیل می دهند، بیرون آورده می شود. نحوه این اتصال در شکل (۱۱-۶) نشان داده شده است.



شکل (۱۱-۶): دو شکل نمایش از اتصال منابع سه فاز به صورت مثلث

باز مشابه با حالت ستاره، متغیرهای فازي و خطي را برای ولتاژ و جریان مشخص می‌کنیم. متغیرهای فازي به صورت $\vec{V}_{ab\ ph}$ ، $\vec{V}_{bc\ ph}$ ، $\vec{V}_{ca\ ph}$ ، $\vec{I}_{ab\ ph}$ ، $\vec{I}_{bc\ ph}$ ، و $\vec{I}_{ca\ ph}$ می‌باشند که ولتاژهای با اندیس ph، بیانگر ولتاژ دو سر منابع، و جریان‌های با اندیس ph، معرف جریان تولیدی توسط سه منبع می‌باشند. از طرف دیگر، متغیرهای خطي که به صورت $\vec{V}_{ab\ L}$ ، $\vec{V}_{bc\ L}$ ، $\vec{V}_{ca\ L}$ ، $\vec{I}_{ab\ L}$ ، $\vec{I}_{bc\ L}$ ، و $\vec{I}_{ca\ L}$ می‌باشند بیانگر ولتاژهای دو سر فازهای (سرهای) خروجی و جریان‌های خارج شده از فازهای (سرهای) a، b، و c می‌باشند، همان‌گونه که از شکل (۱۱-۶) هم مشخص است، ولتاژ هر منبع با ولتاژ خطي آن برابر می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\vec{V}_{ab\ ph} = \vec{V}_{ab\ L} \quad (۱۱-۱۶)$$

$$\vec{V}_{bc\ ph} = \vec{V}_{bc\ L} \quad (۱۱-۱۷)$$

$$\vec{V}_{ca\ ph} = \vec{V}_{ca\ L} \quad (۱۱-۱۸)$$

حال اگر جریان‌های تولیدی هر منبع (جریان‌های فاز) را به صورت،

$$\vec{I}_{ab\ ph} = I_{rms} \angle 0 \quad (۱۱-۱۹)$$

$$\vec{I}_{bc\ ph} = I_{rms} \angle -120^\circ \quad (۱۱-۲۰)$$

$$\vec{I}_{ca\ ph} = I_{rms} \angle -240^\circ \quad (۱۱-۲۱)$$

در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از قانون KCL برای هر گره اتصال مثلث، جریان هر خط را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود (از اندیس ph و L صرف نظر می‌شود):

$$\vec{I}_a = \vec{I}_{ab} - \vec{I}_{ca} = I_{rms} \angle 0 - I_{rms} \angle -240^\circ = \sqrt{3} I_{rms} \angle -30^\circ \quad (۱۱-۲۲)$$

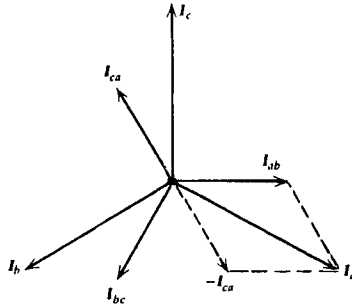
$$\vec{I}_b = \vec{I}_{bc} - \vec{I}_{ab} = I_{rms} \angle -120^\circ - I_{rms} \angle 0 = \sqrt{3} I_{rms} \angle -150^\circ \quad (۱۱-۲۳)$$

$$\vec{I}_c = \vec{I}_{ca} - \vec{I}_{bc} = I_{rms} \angle -240^\circ - I_{rms} \angle -120^\circ = \sqrt{3} I_{rms} \angle 90^\circ \quad (۱۱-۲۴)$$

همان‌گونه که از رابطه‌های (۱۱-۲۲) تا (۱۱-۲۴) مشخص است، اندازه جریان‌های خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان‌های فازي می‌باشند و زاویه جریان‌های خط نیز، 30° درجه عقب‌تر از زاویه جریان‌های فازي می‌باشند. این موضوع را می‌توان توسط نمودار برداری جریان‌های خطي و فازي نیز نشان داد که در شکل (۱۱-۷) مشخص شده است.

با روابط ارائه شده در این بخش، به این نتیجه می‌رسیم که می‌توان منابع سه فاز ستاره را به معادل مثلث آن تبدیل کرد و بر عکس. به عبارت دیگر، اگر دو منبع سه فاز، درون دو جعبه قرار گیرند و فقط سرهای (پایانه‌های) a، b، و c خارج شوند (و نقطه خنثی n مخفی نگه داشته شود) در این صورت به هیچ وجه نمی‌توان با اندازه‌گیری الکتریکی، اتصالات ستاره و مثلث را از هم متمایز نمود. شرط معادل بودن، آن است که ولتاژهای خط باید از نظر دامنه و فاز در هر دو حالت اتصال ستاره و یا مثلث یکسان باشند. با توجه

به این موضوع، بدون آنکه عمومیت بحث را از دست دهیم، معمولاً بر روی اتصال ستاره با توالی abc تأکید می‌گردد؛ مگر آنکه کلمه مثلث در اتصال منبع ذکر گردد.



شکل (۷-۱۱): نمودار فازوری جریان‌های خطی و فازی در اتصال مثلث

مثال (۱-۱۱): در یک منبع سه‌فاز ستاره، اگر توالی فاز به‌صورت abc باشد، و $\vec{V}_{bn} = 120 \angle 0^\circ$ باشد، مطلوب محاسبه $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ و $\vec{V}_{ca}$.

حل: با توجه به توالی فاز abc، در می‌یابیم که $\vec{V}_{an}$ ، 120° درجه از $\vec{V}_{bn}$ جلوتر، و $\vec{V}_{cn}$ ، 120° درجه از $\vec{V}_{bn}$ عقب‌تر است. لذا،

$$\vec{V}_{an} = 120 \angle +120^\circ$$

$$\vec{V}_{bn} = 120 \angle 0^\circ$$

$$\vec{V}_{cn} = 120 \angle -120^\circ$$

حال می‌توان ولتاژهای خطی را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn} = \sqrt{3} \times 120 \angle 15^\circ$$

$$\vec{V}_{bc} = \vec{V}_{bn} - \vec{V}_{cn} = \sqrt{3} \times 120 \angle 30^\circ$$

$$\vec{V}_{ca} = \vec{V}_{cn} - \vec{V}_{an} = \sqrt{3} \times 120 \angle -90^\circ$$

تمرین (۱-۱۱): در یک منبع سه‌فاز مثلث، اگر توالی فازها به‌صورت abc باشد و $\vec{V}_{ab} = 1733 \angle 0^\circ$ گردد، آنگاه مقادیر $\vec{V}_{an}$ ، $\vec{V}_{bn}$ و $\vec{V}_{cn}$ را بیابید.

جواب: $\vec{V}_{an} = \frac{1733}{\sqrt{3}} \angle 270^\circ$ ، $\vec{V}_{bn} = \frac{1733}{\sqrt{3}} \angle 150^\circ$ ، $\vec{V}_{cn} = \frac{1733}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ$

۱۱-۳- بارهای سه‌فاز متعادل

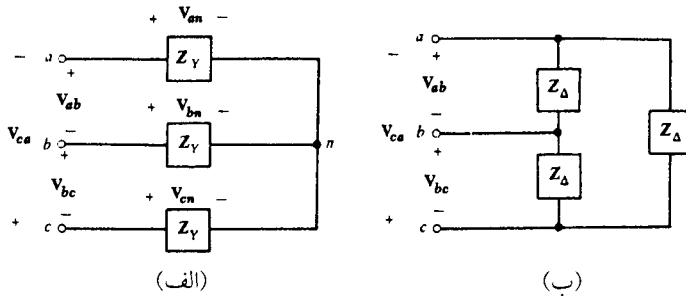
مشابه آنچه که برای منابع سه‌فاز بیان نمودیم، بارهای سه‌فاز می‌توانند به‌صورت اتصال ستاره و یا مثلث به منابع متصل شوند. این دو اتصال در شکل (۸-۱۱) نشان داده شده

است. در این بارهای سه فاز فرض می‌شود که امپدانس هر یک از سه فاز بار مصرفی با یکدیگر مساوی است. لذا منظور از متعادل بودن بار در اتصال ستاره به این معنی است که،

$$\bar{Z}_{an} = \bar{Z}_{bn} = \bar{Z}_{cn} = \bar{Z}_Y \quad (۲۵-۱۱)$$

همچنین در اتصال مثلث، شرط متعادل بودن بار مصرفی ایجاب می‌کند که،

$$\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca} = \bar{Z}_{\Delta} \quad (۲۶-۱۱)$$



شکل (۱۱-۸): بار سه فاز متعادل: (الف) اتصال ستاره؛ (ب) اتصال مثلث

در اتصال ستاره، اگر ولتاژ سه فاز اتصالی به بار، به صورت متعادل باشند، آنگاه با توجه به مساوی بودن امپدانس سه فاز می‌توان نتیجه گرفت که جریان‌های سه فاز خط در اتصال ستاره به صورت متعادل می‌باشد و بالطبع،

$$\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0 \quad (۲۷-۱۱)$$

لذا نیازی به اتصال سیم خنثی به نقطه n بار وجود ندارد.

خصوصیات متغیرهای فازی و خطی در اتصال ستاره و مثلث بارها، دقیقاً مشابه منابع سه فاز می‌باشد. این موضوع به این معنی است که در اتصال ستاره بارهای سه فاز، جریان‌های خط و فاز با هم برابر می‌باشند ولی اندازه ولتاژهای خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژهای فازی (ولتاژ دو سر هر امپدانس $\bar{Z}_Y$) خواهد بود و زاویه ولتاژهای خط به اندازه 30° درجه از زاویه ولتاژهای متناظر فازی، جلوتر است. همچنین در اتصال مثلث بارهای سه فاز، ولتاژهای فازی با خطی برابر می‌باشند ولی اندازه جریان‌های خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان‌های فاز (جریان‌های عبوری از هر امپدانس $\bar{Z}_{\Delta}$) بوده و زاویه جریان‌های خط، به اندازه 30° درجه از زاویه جریان‌های متناظر فازی، عقب‌تر است.

حال مشابه موضوعی که برای تبدیل منابع سه فاز ستاره و مثلث بیان نمودیم، در بارهای سه فاز هم می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان اتصال ستاره را با اتصال مثلث، معادل سازی نمود؟ برای پاسخ به این سؤال باید گفت با توجه به آنکه ولتاژ دو سر امپدانس

مثلاً، $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ دوسر امپدانس ستاره است و با در نظر گرفتن اینکه جریان عبوری از امپدانس اتصال ستاره، $\sqrt{3}$ برابر جریان گذرنده از امپدانس اتصال مثلث است، لذا به راحتی می توان اثبات کرد که برای معادل سازی بارهای ستاره و مثلث، باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\bar{Z}_{\Delta} = 3\bar{Z}_Y \quad (28-11)$$

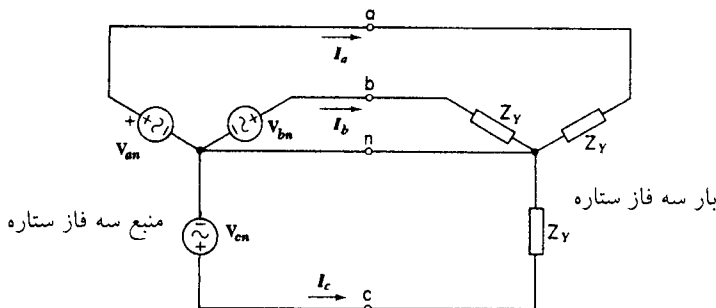
به عبارت دیگر،

$$|\bar{Z}_{\Delta}| = 3|\bar{Z}_Y| \quad (29-11)$$

$$\angle \bar{Z}_{\Delta} = \angle \bar{Z}_Y \quad (30-11)$$

لازم به ذکر است که معادل بودن دو اتصال ستاره و مثلث، به مفهوم آن است که در پایانه های a، b، c و هیچ گونه اندازه گیری الکتریکی جهت تمایز این دو اتصال نمی توان انجام داد.

مثال (۱۱-۲): یک بار سه فاز با اتصال ستاره که امپدانس هر شاخه آن برابر $\bar{Z}_Y = 80 + j30 \Omega$ می باشد، به یک منبع سه فاز با اتصال ستاره که مقدار موثر ولتاژ هر فاز آن برابر $79/67 \text{ kV}$ است، متصل شده است. این مدار را می توان در شکل (۱۱-۹) مشاهده نمود. الف) فازور جریان های سه فاز بار را پیدا کنید. ب) ولتاژهای خطی مربوط به بار را بیابید. ج) اگر بار مورد نظر با همان امپدانس، با اتصال مثلث باشد، جریان های شاخه های بار را بیابید.



شکل (۱۱-۹): مدار سه فاز مربوط به مثال (۱۱-۲)

حل: الف) با توجه به مقدار موثر ولتاژ منابع سه فاز، فازور ولتاژ منبع سه فاز را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{an} &= 79/67 \angle 0^\circ \text{ kV} \\ \bar{V}_{bn} &= 79/67 \angle -120^\circ \text{ kV} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{cn} = 79/67 \angle -24.0^\circ \text{ kV}$$

در نتیجه، جریان‌های هر فاز بار، برابر است با:

$$\vec{I}_a = \frac{\vec{V}_{an}}{\vec{Z}_Y} = \frac{79/67 \angle 0^\circ}{80 + j30} = 0.932 \angle -20/56^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_b = \frac{\vec{V}_{bn}}{\vec{Z}_Y} = 0.932 \angle -20/56^\circ - 120^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_c = \frac{\vec{V}_{cn}}{\vec{Z}_Y} = 0.932 \angle -20/56^\circ - 240^\circ \text{ kA}$$

لازم به ذکر است که چون اتصال بار، به طور ستاره می‌باشد، لذا جریان‌های خط و فاز بار، با هم برابر می‌باشند.

ب) برای تعیین ولتاژهای خطی سه فاز بار، می‌دانیم که سه فاز بار با سه فاز منبع، موازی می‌باشند. لذا ولتاژهای خطی بار با ولتاژهای خطی منبع، برابر هستند. یعنی،

$$\vec{V}_{ab} = \sqrt{3} \vec{V}_{an} \angle 30^\circ = \sqrt{3} \times 79/67 \angle 30^\circ = 138 \angle 30.0^\circ \text{ kV}$$

$$\vec{V}_{bc} = 138 \angle -90.0^\circ \text{ kV}$$

$$\vec{V}_{ca} = 138 \angle -210.0^\circ \text{ kV}$$

ج) با توجه به آنکه در اتصال مثلث، ولتاژهای خطی در دو سر هر فاز، در دو سر هر شاخه مثلث قرار می‌گیرد و با در نظر گرفتن این نکته که همان امپدانس $80 + j30 \Omega$ برای شاخه‌های مثلث نیز در نظر گرفته شده است، لذا خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{ab} = \frac{\vec{V}_{ab}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{138 \angle 30.0^\circ \text{ kV}}{80 + j30} = 1/615 \angle 9/44^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_{bc} = \frac{\vec{V}_{bc}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{138 \angle -90.0^\circ \text{ kV}}{80 + j30} = 1/615 \angle 9/44^\circ - 120^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_{ca} = \frac{\vec{V}_{ca}}{\vec{Z}_\Delta} = \frac{138 \angle -210.0^\circ \text{ kV}}{80 + j30} = 1/615 \angle 9/44^\circ - 240^\circ \text{ kA}$$

تمرین (۱۱-۲): یک سیستم سه فاز متعادل با ولتاژ فازی $\vec{V}_{an} = 240 \angle -9.0^\circ \text{ V}$ به صورت ستاره متصل شده است. سرعت زاویه‌ای این منبع سه فاز برابر $\omega = 500 \text{ rad/sec}$ است. حال این منبع به یک بار سه فاز با اتصال ستاره متصل شده است که در هر فاز، یک خازن با ظرفیت $50 \mu\text{F}$ با یک مقاومت 50Ω سری شده و معادل این دو، با یک سلف 50 mH موازی شده است. در این مدار مطلوب است: الف) $\vec{V}_{bn}$ ، ب) $\vec{V}_{bc}$ ، ج) $\vec{I}_a$

جواب: الف) $240 \angle 150.0^\circ$ ؛ ب) $416 \angle 18.0^\circ$ ؛ ج) $5/6 \angle -43/30^\circ$

۱۱-۴- توان در سیستم‌های سه‌فاز

در فصل هفتم، پس از تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای تک‌فاز، توان در این سیستم‌ها را بیان نمودیم. در آنجا، فازور توان ظاهری در سیستم‌های تک‌فاز را به صورت حاصل ضرب فازور ولتاژ در مزدوج فازور جریان بیان نمودیم. یعنی،

$$\vec{S} = \vec{V}\vec{I}^* \quad (۱۱-۳۱)$$

حال اگر $\vec{I} = I_{rms} \angle \beta$ و $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ در نظر بگیریم آنگاه رابطه (۱۱-۳۱) به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\vec{S} = V_{rms} \angle \alpha (I_{rms} \angle \beta)^* = V_{rms} I_{rms} \angle \alpha - \beta$$

حال اگر توان ظاهری رابطه اخیر را از صورت قطبی به صورت دکارتی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\vec{S} = V_{rms} I_{rms} \cos \phi + j V_{rms} I_{rms} \sin \phi \quad (۱۱-۳۲)$$

که $\phi = \alpha - \beta$ می‌باشد. سپس در فصل هفتم، مفهوم توان حقیقی (اکتیو) و موهومی (راکتیو) را به شکل زیر تعریف نمودیم:

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos \phi \quad (۱۱-۳۳)$$

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin \phi \quad (۱۱-۳۴)$$

حال می‌خواهیم همین روابط را برای سیستم‌های سه‌فاز متعادل و در دو حالت اتصال ستاره و اتصال مثلث بیان کنیم. با توجه به آنکه در اتصال ستاره، فرض بر آن بود که سیستم، به صورت متعادل است (یعنی امپدانس‌های سه‌فاز با هم برابرند) لذا توان ظاهری در هر سه‌فاز با هم برابرند. یعنی،

$$\vec{S}_{an} = \vec{S}_{bn} = \vec{S}_{cn} = \vec{S}_{\backslash ph} \quad (۱۱-۳۵)$$

که زیر نویس $\backslash ph$ به معنای تک فاز می‌باشد. همچنین در اتصال مثلث بارهای متعادل می‌توان نوشت:

$$\vec{S}_{ab} = \vec{S}_{bc} = \vec{S}_{ca} = \vec{S}_{\backslash ph} \quad (۱۱-۳۶)$$

اما در بارهای سه‌فاز با هر دو اتصال ستاره و مثلث، می‌توان گفت که توان سیستم سه‌فاز، از مجموع توان تک تک فازها محاسبه می‌شود و چون توان‌های هر سه‌فاز با هم برابر هستند، لذا:

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = ۳\vec{S}_{\backslash ph}$$

اما می‌دانیم که توان تک‌فاز بر اساس رابطه (۱۱-۳۱) محاسبه می‌شود. لذا،

$$\vec{S}_{\text{۳}ph} = ۳V_{\backslash ph} I_{\backslash ph} \angle \phi \quad (۱۱-۳۷)$$

که در این رابطه، زیر نویس ۳ph به معنای سیستم سه فاز می‌باشد. همچنین V_{1ph} معرّف ولتاژ مؤثر دو سر عناصر هر شاخه و I_{1ph} معرّف جریان مؤثر عبوری از عناصر هر شاخه می‌باشد. این روابط، هم برای اتصال ستاره و هم برای اتصال مثلث صادق می‌باشد.

حال می‌خواهیم رابطه (۱۱-۳۷) را برای اتصال‌های ستاره و مثلث به‌طور جداگانه بیان کنیم. در بخش قبلی بیان کردیم که در اتصال ستاره، اندازه جریان خط، با جریان فاز، برابر است (یعنی $I_L = I_{1ph}$) ولی اندازه ولتاژ خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ فاز است (یعنی $V_L = \sqrt{3}V_{1ph}$). پس رابطه (۱۱-۳۷) بر حسب متغیرهای خطی به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{3ph} &= 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \angle \phi \\ \bar{S}_{3ph} &= \sqrt{3} V_L I_L \angle \phi\end{aligned}\quad (11-38)$$

که در این رابطه، V_L اندازه ولتاژ مؤثر بین فازهای a، b، و c، و I_L هم اندازه جریان مؤثر عبوری از سرهای فازهای a، b، و c می‌باشد.

به‌طور مشابه، برای بارهای مثلث بیان نمودیم که اندازه ولتاژهای خطی و فازی با هم برابرند ولی اندازه جریان خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فازی است. لذا رابطه (۱۱-۳۷) را می‌توان به‌شکل زیر تغییر داد:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{3ph} &= 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \angle \phi \\ \bar{S}_{3ph} &= \sqrt{3} V_L I_L \angle \phi\end{aligned}\quad (11-39)$$

پس با مقایسه روابط (۱۱-۳۸) و (۱۱-۳۹) برای بارهای سه‌فاز با اتصال ستاره و مثلث در می‌یابیم که شکل روابط برای محاسبه توان در هر دو اتصال، مشابه یکدیگر می‌باشد. با تبدیل این دو رابطه از شکل قطبی به‌شکل دکارتی خواهیم داشت:

$$\bar{S}_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi + j \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi \quad (11-40)$$

در نتیجه، توان حقیقی و موهومی بارهای سه‌فاز را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$P_{3ph} = 3 P_{1ph} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi \quad W \quad (11-41)$$

$$Q_{3ph} = 3 Q_{1ph} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi \quad VAR \quad (11-42)$$

باز هم یادآوری کنیم که روابط (۱۱-۳۸) تا (۱۱-۴۲) صرفنظر از نوع اتصال بار می‌باشد و فقط با متغیرهای خط در بارهای سه‌فاز مرتبط می‌باشد. لازم به‌ذکر است که واحد توان حقیقی را با وات (W)، واحد توان موهومی را با ولت آمپر راکتو (VAR) و واحد توان ظاهری را با ولت آمپر (VA) بیان نمودیم. پس با توجه به آنکه توان ظاهری سه‌فاز برابر

$$S_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L \quad (11-43)$$

است، لذا توان حقیقی و موهومی سه فاز را می توان به صورت های زیر نیز بیان نمود:

$$P_{3ph} = S_{3ph} \cos \phi \quad (44-11)$$

$$Q_{3ph} = S_{3ph} \sin \phi \quad (45-11)$$

مثال (۱۱-۳): در مثال (۱۱-۲) در حالتی که اتصال بار به صورت ستاره باشد، توان های ظاهری، حقیقی و موهومی هر فاز و سه فاز را بیابید.

حل: در آن مثال، جریان های هر فاز بار به صورت زیر محاسبه نمودیم:

$$\vec{I}_a = 0.932 \angle -20.56^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_b = 0.932 \angle -20.56 - 120^\circ \text{ kA}$$

$$\vec{I}_c = 0.932 \angle -20.56 - 240^\circ \text{ kA}$$

حال با توجه به اینکه، ولتاژ فازی $\vec{V}_{an} = 79.6 \angle 0^\circ \text{ kV}$ می باشد، لذا توان ظاهری بار هر فاز برابر است با:

$$\vec{S}_{1ph} = \vec{V}_{1ph} \cdot \vec{I}_{1ph}^*$$

$$= (79.6 \angle 0^\circ)(0.932 \angle -20.56^\circ)^* = 74.25 \angle 20.56^\circ \text{ MVA}$$

برای به دست آوردن توان حقیقی و موهومی هر فاز، فازور $\vec{S}_{1ph}$ را به صورت دکارتی می نویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{1ph} &= 74.25 \angle 20.56^\circ \text{ kVA} = 74.25 \cos(20.56^\circ) + j 74.25 \sin(20.56^\circ) = \\ &= 69.5 + j 26.1 \end{aligned}$$

لذا در می یابیم که،

$$P_{1ph} = 69.5 \text{ MW/phase}$$

$$Q_{1ph} = 26.1 \text{ MVAR/phase}$$

لازم به ذکر است که این توان های حقیقی و موهومی را می توان از روابط مستقیم آنها نیز محاسبه نمود. با توجه آنکه $\phi = 20.56^\circ$ می باشد لذا،

$$P_{1ph} = V_{1ph} I_{1ph} \cos \phi = 79.6 \times 0.932 \times \cos 20.56^\circ = 69.5 \text{ MW/phase}$$

$$Q_{1ph} = V_{1ph} I_{1ph} \sin \phi = 79.6 \times 0.932 \times \sin 20.56^\circ = 26.1 \text{ MVAR/phase}$$

حال توان سه فاز اکتیو و راکتیو و ظاهری را می توان از سه برابر کردن هر کدام آنها به دست آورد.

$$S_{3ph} = 3 \times 74.25 = 222.8 \text{ MVA/3phase}$$

$$P_{3ph} = 3 \times 69.5 = 208.5 \text{ MW/3phase}$$

$$Q_{3ph} = 3 \times 26.1 = 78.3 \text{ MVAR/3phase}$$

هر کدام از توان‌های سه فاز را می‌توان به‌طور مستقیم نیز به‌دست آورد. یعنی،

$$S_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 138 \times 0.932 = 222/8 \text{ MVA/3phase}$$

$$P_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi = \sqrt{3} \times 138 \times 0.932 \times \cos 20.56 = 208/5 \text{ MW/3phase}$$

$$Q_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi = \sqrt{3} \times 138 \times 0.932 \times \sin 20.56 = 78/3 \text{ MVAR/3phase}$$

لازم به‌ذکر است که اعداد روابط اخیر، با توجه به این نکته بیان شده‌اند که اتصال بار به‌صورت اتصال ستاره است و با توجه به مساوی بودن جریان خط و فاز، و $\sqrt{3}$ برابر بودن ولتاژ خط نسبت به ولتاژ فاز می‌باشد که این اعداد در مثال (۱۱-۲) محاسبه شده بودند.

مثال (۱۱-۴): یک بار سه‌فاز تحت ولتاژ ۲۴۰۰V (ولتاژ خطی)، توان سه‌فازی به‌مقدار ۱۰۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز دریافت می‌کند. الف) اگر این بار به‌صورت ستاره باشد، امپدانس سه‌فاز را به‌دست آورید؟ ب) اگر بار به‌صورت اتصال مثلث باشد، امپدانس هر فاز چقدر است؟

حل: الف) در ابتدا باید اندازه جریان خط را به‌دست آوریم. با توجه به واحد توان سه‌فاز ارائه شده، در می‌یابیم که توان ظاهری سه‌فاز داده شده است. لذا،

$$S_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L$$

$$I_L = \frac{100 \text{ kVA}}{\sqrt{3} \times 2400} = 24/06 \text{ A}$$

با توجه به اینکه $\cos \phi = 0.8$ پس‌فاز است در نتیجه، فازور جریان خط برابر است با:

$$\vec{I}_L = 24/06 \angle -\cos^{-1} 0.8 = 24/06 \angle -36/87^\circ \text{ A}$$

حال با توجه به تساوی جریان خط و فاز، و ولتاژ $\angle 0$ ، $\vec{V}_{an} = 2400/\sqrt{3} \angle 0$ ، امپدانس هر فاز ستاره برابر است با:

$$\vec{Z}_Y = \frac{\vec{V}_{an}}{\vec{I}_{1ph}} = \frac{1385/64 \angle 0}{24/06 \angle -36/87} = 57/59 \angle 36/87^\circ \Omega$$

ب) در صورتی که اتصال به‌صورت مثلث باشد، جریان خط به‌همان مقدار $\sqrt{3}$ می‌باشد. لذا برای محاسبه جریان فاز، باید اندازه آن، $\vec{I}_L = 24/06 \angle -36/87^\circ$ برابر گردد و زاویه آن هم، 30° درجه بیشتر شود؛ یعنی $\vec{I}_{ph} = 1389 \angle -6/78^\circ$ می‌گردد. حال ولتاژ خط بین دو فاز a و b برابر $\vec{V}_{ab} = 2400 \angle 30^\circ \text{ V}$ است. زاویه 30° درجه برای ولتاژ مذکور به آن دلیل است که زاویه ولتاژ فازی را برابر صفر درجه در نظر گرفته‌ایم. در نتیجه خواهیم داشت.

$$\bar{Z}_{\Delta} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{I}_{ph}} = \frac{240 \angle 30^\circ}{13/89 \angle -6/87} = 172/786 \angle 36/87 \Omega$$

از مقایسه بین امپدانس $\bar{Z}_Y$ و $\bar{Z}_{\Delta}$ نتیجه می‌گیریم که زاویای این دو امپدانس، با هم برابرند، ولی اندازه امپدانس مثلث، ۳ برابر امپدانس ستاره است. یعنی:

$$\bar{Z}_{\Delta} = 172/786 = 3 \times 57/59 = 3 \times \bar{Z}_Y$$

تسریع (۱۱-۳): یک بار سه‌فاز تحت ولتاژ خطی ۲۴۰۰V، توان ۵۰۰kVA را در ضریب قدرت ۰/۸ پس‌فاز دریافت می‌کند. مطلوبست محاسبه: الف) ولتاژ خط $\bar{V}_L$ ؛ ب) جریان خط $\bar{I}_L$ ؛ ج) توان حقیقی، موهومی و ظاهری سه‌فاز (S_{ph} ، Q_{ph} ، P_{ph})

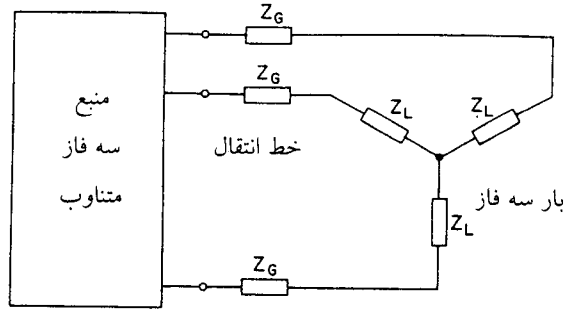
جواب: الف) $\bar{V}_L = 2400 \angle 0^\circ$ ؛ ب) $\bar{I}_L = 120/28 \angle -36/87$ ؛

ج) $S_{ph} = 500 \text{ kVA}$ ، $Q_{ph} = 300 \text{ kVAR}$ ، $P_{ph} = 400 \text{ kW}$

۱۱-۵- تحلیل مدارهای سه‌فاز متعادل

با توجه به آنکه در مدارهای سه‌فاز موردنظر، سیستم به‌صورت متقارن می‌باشد (به‌عبارت دیگر، امپدانس عناصر هر سه‌فاز اعم از منابع، خطوط و بارها با هم مساوی می‌باشند)، لذا می‌توان نتیجه گرفت که تمام متغیرهای شبکه به‌صورت متعادل می‌باشند؛ یعنی اندازه‌های متغیرهای سه‌فاز با هم برابر بوده ولی زاویه‌های آنان با یکدیگر ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند. لذا در این حالت، استفاده از تحلیل تک فاز، بررسی سیستم را تا حد بسیار زیادی ساده خواهد کرد. این نوع تحلیل را به‌طور مفصل در فصل هفتم بیان نموده‌ایم. فقط نکته‌ای که باقی می‌ماند آن است که اگر اتصال بارها و منابع سه‌فاز، به‌صورت اتصال مثلث باشند برای سادگی کار، بهتر است که آنان را با اتصال ستاره معادل‌سازی کنیم تا مرکز ستاره (سیم خنثی) برای این وسایل ایجاد شود. با اتصال مراکز ستاره کلیه وسایل سه‌فاز، می‌توان از تحلیل تک فاز استفاده نمود.

مثال (۱۱-۵): یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره و امپدانس‌های هر فاز $\bar{Z}_L = 4 + j3 \Omega$ از طریق یک خط با امپدانس هر فاز $\bar{Z}_G = 0/1 + j0/1 \Omega$ به یک منبع سه‌فاز با اتصال ستاره و ولتاژ خط ۱۲۰V مؤثر متصل شده است. نحوه اتصال این مدار را می‌توان در شکل (۱۱-۱۰) مشاهده نمود. در این مدار، مطلوبست: الف) جریان‌های سه‌فاز بار؛ ب) ولتاژهای سه‌فاز بار؛ ج) ولتاژ خطی در دو سر بار.



شکل (۱۱-۱۰): شبکه سه فاز مربوط به مثال (۱۱-۵)

حل: با توجه به آنکه ولتاژهای خط در دو سر منبع، ۱۲۰۷ می باشد، لذا ولتاژهای فازی منبع برابرند با:

$$\vec{V}_{an} = \frac{120}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{bn} = \frac{120}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{cn} = \frac{120}{\sqrt{3}} \angle -240^\circ \text{ V}$$

حال با توجه به اتصال ستاره بار، جریان فاز بارها (که همان جریان خط آن می باشد) برابر است با:

$$\vec{I}_{an} = \frac{\frac{120}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(0/1 + j0/1) + (4 + j3)} = \frac{13/48 \angle -37/1^\circ}{(4 + j3)} \text{ A}$$

با توجه به اختلاف زاویه ۱۲۰ درجه بین جریان‌های فازی خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{bn} = 13/48 \angle -37/1 - 120^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_{cn} = 13/48 \angle -37/1 - 240^\circ \text{ A}$$

این جریان‌های فازی با جریان‌های خطی برابر هستند.

ب) برای محاسبه ولتاژ هر فاز بار می توان نوشت:

$$\vec{V}_{an \text{ Load}} = \vec{Z}_L \vec{I}_{an} = (4 + j3)(13/48 \angle -37/1^\circ) = 67/4 \angle -0/23^\circ \text{ V}$$

به همین ترتیب، ولتاژهای دو فاز دیگر بار را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{V}_{bn \text{ Load}} = 67/4 \angle -0/23 - 120^\circ = 67/4 \angle -120/23^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{cn \text{ Load}} = 67/4 \angle -0/23 - 240^\circ = 67/4 \angle -240/23^\circ \text{ V}$$

ج) برای محاسبه ولتاژهای خطی در سه فاز بار، می توان از این خاصیت در اتصال ستاره استفاده کرد که اندازه ولتاژ خط، $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ فازی است و زاویه آن هم، 30° درجه جلوتر از زاویه ولتاژ فازی است. پس،

$$\vec{V}_{ab \text{ Load}} = \sqrt{3} \times 67/4 \angle -0/23 + 30^\circ = 116/74 \angle 29/77^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{bc \text{ Load}} = 116/74 \angle -90/23^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{ca \text{ Load}} = 116/74 \angle -210/23^\circ \text{ V}$$

مثال (۱۱-۶): در صورتی که بخواهیم شرایط ولتاژهای خط و جریانهای خط در مثال (۱۱-۵) بدون تغییر بماند، آنگاه امپدانس معادل مثلث را برای بار سه فاز بیابید.

حل: برای آنکه شرایط خطی یکسان باشد، باید امپدانس معادل مثلث، ۳ برابر امپدانس ستاره باشد. یعنی در هر شاخه از بار مثلث، امپدانس زیر وجود داشته باشد:

$$\vec{Z}_\Delta = 3 \times \vec{Z}_Y = 3(4 + j3) = 12 + j9\Omega$$

به عبارت دیگر، اگر بار با اتصال مثلث به امپدانس $\vec{Z}_\Delta = 12 + j9\Omega$ قرار گیرد، مشخصات جریانهای خط و ولتاژهای خط در این مثال، همان مشخصات متناظر ارائه شده در مثال (۱۱-۵) می باشد.

مثال (۱۱-۷): یک منبع سه فاز با اتصال ستاره با ولتاژ خط 2400 V مؤثر، دو بار سه فاز را به طور موازی با هم تغذیه می کنند. بار سه فاز A با اتصال ستاره، توان سه فاز 300 kVA را در ضریب قدرت $0/8$ پس فاز دریافت می کند ولی بار سه فاز B با اتصال ستاره، توان 240 kVA را در ضریب قدرت $0/6$ پیش فاز تحویل می گیرد. در صورتی که توالی فاز به صورت abc باشد مطلوبست: الف) محاسبه جریانهای هر فاز برای بارهای A و B؛ ب) محاسبه امپدانسهای هر فاز بارها؛ ج) محاسبه جریانهای سه فاز منبع سه فاز. حل: الف) با توجه به اتصال ستاره منبع سه فاز، ولتاژهای سه فاز را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}_{an} = \frac{2400}{\sqrt{3}} \angle 0 = 1385/6 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{bn} = 1385/6 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_{cn} = 1385/6 \angle -240^\circ \text{ V}$$

برای محاسبه جریانهای هر فاز بارها، ابتدا توان ظاهری $\vec{S}$ را برای هر فاز بارها به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\vec{S}_{1phA} = \frac{300}{3} \angle \cos^{-1} 0/8 = 100 \angle 36/87^\circ \text{ kVA}$$

$$\bar{S}_{1phB} = \frac{240}{3} \angle -\cos^{-1} 0.6 = 80 \angle -53.13^\circ \text{ kVA}$$

لازم به یاد آوری از فصل هفتم است که در صورتی که بار به صورت پس فاز باشد، زاویه ضریب قدرت ϕ با علامت مثبت برای فازور توان ظاهری، وارد می‌شود و اگر بار، به صورت پیش فاز باشد، زاویه ϕ با علامت منفی در فازور توان ظاهری پدیدار می‌گردد. حال با استفاده از رابطه $\bar{S}_{1ph} = \bar{V}_{1ph} \bar{I}_{1ph}^*$ ، جریان‌های هر فاز بارهای A و B را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\bar{I}_{aA} = \left(\frac{\bar{S}_{1phA}}{\bar{V}_{an}} \right)^* = \left(\frac{100 \times 10^3 \angle 36.87^\circ}{1385.6 \angle 0^\circ} \right)^* = 72/17 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{aB} = \left(\frac{\bar{S}_{1phB}}{\bar{V}_{an}} \right)^* = \left(\frac{80 \times 10^3 \angle -53.13^\circ}{1385.6 \angle 0^\circ} \right)^* = 57/74 \angle +53.13^\circ \text{ A}$$

علت آنکه ولتاژ $\bar{V}_{an}$ در محاسبه هر دو جریان بارهای A و B یکسان می‌باشد، به علت موازی بودن هر دو بار A و B با منبع سه فاز می‌باشد. جریان‌های فازهای b و c را می‌توان بترتیب با 120° و 240° درجه تأخیر نسبت به جریان فاز a برای بارهای A و B به دست آورد. (ب) با توجه به محاسبه جریان‌های هر فاز برای بارهای A و B ، امپدانس‌های هر فاز دو بار را می‌توان محاسبه نمود:

$$\bar{Z}_{YA} = \frac{\bar{V}_{an}}{\bar{I}_{aA}} = \frac{1385.6 \angle 0^\circ}{72/17 \angle -36.87^\circ} = 19/2 \angle 36.87^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_{YB} = \frac{\bar{V}_{an}}{\bar{I}_{aB}} = \frac{1385.6 \angle 0^\circ}{57/74 \angle 53.13^\circ} = 23/99 \angle -53.13^\circ \Omega$$

حال اگر این دو امپدانس را به صورت دکارتی نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\bar{Z}_{YA} = 15/36 + j11/52 \Omega$$

$$\bar{Z}_{YB} = 14/4 - j19/2 \Omega$$

به این نتیجه می‌رسیم که بار A را می‌توان از اتصال سری یک مقاومت $15/36 \Omega$ و یک سلف با راکتانس $11/52 \Omega$ در نظر گرفت که برای هر سه فاز آن به طور یکسان می‌باشد. همچنین بار B را نیز می‌توان از سری شدن دو عنصر مقاومت و خازن در نظر گرفت که مقدار مقاومت آن برابر $14/4 \Omega$ و راکتانس خازنی برابر $19/2 \Omega$ می‌باشد. پس بار A را یک بار سلفی و بار B را یک بار خازنی می‌نامیم.

(ج) با توجه به آنکه بارهای A و B به طور موازی به منبع سه فاز متصل شده است، لذا سرهای فاز a از بارهای A و B ، به فاز a از منبع، متصل شده است. لذا،

$$\vec{I}_{as} = \vec{I}_{aA} + \vec{I}_{aB}$$

که اندیس s به معنای منبع می باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{I}_{as} = 72/17\angle -36/87 + 57/74\angle 53/13 = 92/4\angle 1/79^\circ \text{ A}$$

به همین ترتیب جریان های فاز دوم و سوم از منبع برابرند با:

$$\vec{I}_{bs} = 92/4\angle 1/79 - 120^\circ = 92/4\angle -118/21^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_{cs} = 92/4\angle 1/79 - 240^\circ = 92/4\angle -238/21^\circ \text{ A}$$

تمرین (۴-۱۱): دو بار سه فاز با اتصال مثلث از طریق یک خط سه فاز به یک سیستم سه فاز متعادل متصل شده است. بار A، توان حقیقی سه فاز ۳۰kW را در ضریب قدرت ۰/۸ پس فاز جذب می کند. همچنین بار B، توان ظاهری سه فاز ۲۴kVA را در ضریب قدرت ۰/۹ پیش فاز مصرف می کند. در صورتی که ولتاژ خط در بارها برابر ۶۶۰V مؤثر باشد و امپدانس هر سه فاز خط هم برابر 0.6Ω باشد: الف) امپدانس هر فاز بارها را محاسبه کنید؛ ب) کل توان حقیقی دریافتی دو بار را بیابید؛ ج) کل توان تلف شده در خط سه فاز را بیابید ($3RI^2$ = توان تلفاتی).

جواب: الف) $Z_{\Delta B} = 49 - j23/7$ ، $Z_{\Delta A} = 27/9 + j20/9$

ب) $P_{rphB} + P_{rphA} = 51/6 \text{ kW}$

ج) $3RI^2 = 3/87 \text{ kW}$

۱۱-۶- خلاصه و نتیجه گیری

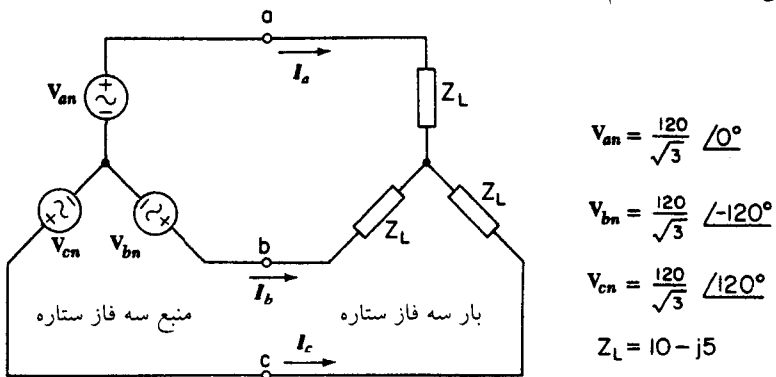
به عنوان آخرین مبحث از مباحث ارائه شده در این کتاب، مدارهای سه فاز متعادل را مورد بررسی قرار دادیم. اهمیت این فصل در تحلیل مدارهای الکتریکی از آنجا ناشی می شود که سیستم های انتقال انرژی الکتریکی به صورت سه فاز می باشند که در کشور ما با فرکانس ۵۰Hz صورت می گیرد. خلاصه مباحث ارائه شده در این فصل را می توان به صورت زیر بیان نمود:

- منابع و بارهای الکتریکی سه فاز را می توان به دو صورت اتصال ستاره و مثلث در نظر گرفت.
- در اتصال ستاره، اندازه ولتاژهای خطی، $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژهای فازی است و زاویه ولتاژهای خطی نیز ۳۰ درجه جلوتر از زاویه ولتاژهای فازی است. این در حالی است که مشخصات جریان های خطی و فازی در اتصال ستاره دقیقاً با هم برابرند.

- در اتصال مثلث، بر عکس اتصال ستاره، ولتاژهای خطی و فازي با هم برابر می‌باشند ولی اندازه جریان‌های خطی، $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان‌های فازي می‌باشند. همچنین زاویه جریان‌های خطی، 30° درجه عقب‌تر از زاویه جریان‌های فازي خواهد بود.
- توان‌های ظاهری، حقیقی و موهومی در سیستم‌های سه‌فاز (با اتصال ستاره و یا مثلث)، سه برابر توان‌های متناظر آنان در سیستم‌های تک‌فاز می‌باشد.

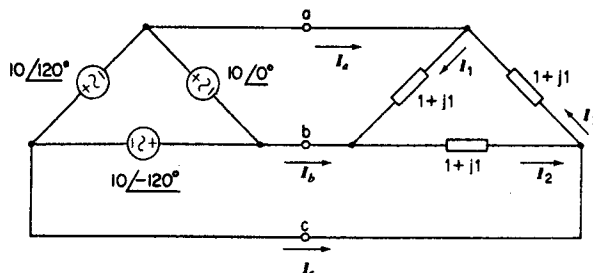
۷-۱۱- مسائل مروری

۱- در شکل (۱۱-۱۱) یک بار سه‌فاز با اتصال ستاره به یک منبع سه‌فاز ستاره متصل شده است. با مشخصات ارائه‌شده در شکل، جریان هر سه‌فاز و توان مصرفی توسط هر فاز (توان حقیقی، موهومی و ظاهری) را بیابید. همچنین نمودار برداری ولتاژها و جریان‌های خطی و فازي را رسم کنید.



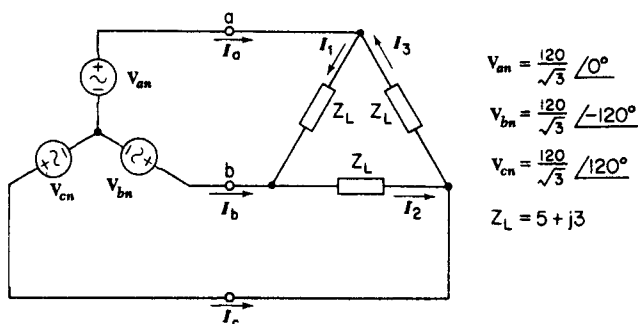
شکل (۱۱-۱۱): مدار سه‌فاز مربوط به سؤال (۱)

۲- برای مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۱۲-۱۱) جریان‌های هر شاخه بار و جریان‌های سه‌فاز خط را بیابید.



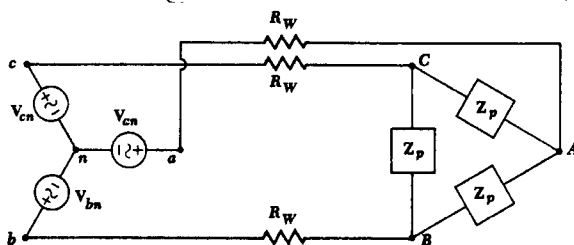
شکل (۱۲-۱۱): مدار سه‌فاز مربوط به سؤال (۲)

۳- یک بار سه فاز مثلث به یک منبع سه فاز ستاره متصل شده است که در شکل (۱۱-۱۳) مشخص شده است. در این مدار، جریان‌های سه فاز بار، جریان‌های خط، و ولتاژهای دو سر هر فاز از بار را محاسبه کنید. نمودار برداری این ولتاژ و جریان‌ها را رسم کنید.



شکل (۱۱-۱۳): مدار سه فاز مربوط به سؤال (۳)

۴- مدار سه فاز متعادل ارائه شده در شکل (۱۱-۱۴)، با ولتاژ موثر $\vec{V}_{BC} = 100 \angle 20^\circ V$ و توانی فاز abc کار می‌کند. اگر بار سه فاز، توان حقیقی 3 kW را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز جذب کند و $R_W = 0.6 \Omega$ (باشد آنگاه: الف) کل توان تلفاتی را در مقاومت‌ها به دست آورید. ب) ولتاژهای $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ ، و $\vec{V}_{ca}$ در منبع متعادل را بیابید.



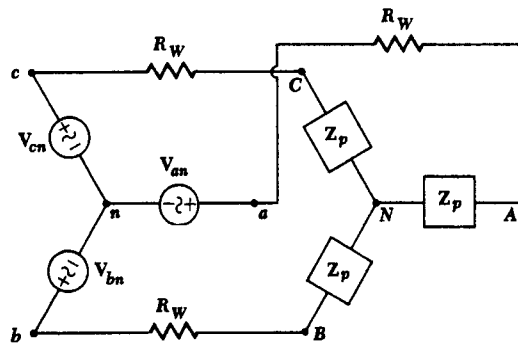
شکل (۱۱-۱۴) مدار سه فاز مربوط به مسائل (۴) تا (۷)

۵- در مدار شکل (۱۱-۱۴)، اگر $\vec{V}_{ab} = 460 \angle 0^\circ V$ باشد و توانی فاز abc باشد و $R_W = 3/2 \Omega$ باشد و منبع سه فاز، توان ظاهری $(240 + j60) \text{ kVA}$ را تولید کند (مطلوبست: الف) محاسبه $\vec{V}_{AN}$ در بار سه فاز؛ ب) $\vec{I}_{aA}$ ، $\vec{I}_{bB}$ ، و $\vec{I}_{cC}$ را بیابید؛ ج) مقدار امپدانس شاخه‌های بار سه فاز ($\vec{Z}_P$) را بیابید.

۶- در شکل (۱۱-۱۴)، اگر $\vec{Z}_P = 20 + j18 \Omega$ باشد و $\vec{I}_{aA} = 20 \angle -46^\circ A$ باشد، منبع هم در ضریب قدرت 0.94 پس فاز کار کند، آنگاه: الف) R_W را تعیین کنید؛ ب) توان ظاهری تحویلی منبع به مدار چقدر است؟ ج) $\vec{V}_{AB}$ را به دست آورید؛ د) $\vec{V}_{ab}$ را بیابید.

۷- در شکل (۱۱-۱۴) فرض کنید که $\bar{Z}_p$ به صورت یک امپدانس خازنی به مقدار $\Omega -j24$ باشد که با یک سلف $0.25H$ موازی شده است. حال اگر $\vec{V}_{an} = 230 \angle 0^\circ V$ و $f = 50Hz$ و $R_W = 2/5 \Omega$ باشد (آنگاه: الف) $\bar{I}_{aA}$ را بیابید؛ ب) کل توان دریافتی بار را محاسبه کنید؛ ج) ضریب قدرت منبع را بیابید.

۸- شکل (۱۱-۱۵) یک سیستم سه فاز متعادل را نشان می‌دهد. در این سیستم $R_W = 0$ و $\vec{V}_{an} = 288.7 \angle -3.0^\circ V$ می‌باشد. حال فرض کنید که هر فاز بار سه فاز، توان اکتیو $2/4 kW$ را در ضریب قدرت 0.8 پیش فاز جذب می‌کند. در صورتی که توالی فاز abc باشد (آنگاه: الف) $\vec{V}_{ab}$ را بیابید؛ ب) $\bar{Z}_p$ برای بار را بیابید؛ ج) جریان خط $\bar{I}_{cC}$ را بیابید؛ د) کل توان حقیقی، موهومی و ظاهری دریافتی توسط سه فاز بار را محاسبه کنید.



شکل (۱۱-۱۵): سیستم سه فاز مربوط به سؤال (۸) تا (۱۰)

۹- بار سه فاز متعادل نشان داده شده در شکل (۱۱-۱۵)، توان $6 kW$ را در ضریب قدرت 0.83 پس فاز دریافت می‌کند. فرض کنید که $R_W = 0.8 \Omega$ و $\vec{V}_{AC} = 100 \angle 20^\circ V$ (ولتاژ دو سر فاز در بار سه فاز) و توالی سیستم به صورت abc باشد (آنگاه: الف) ولتاژهای خطی $\vec{V}_{ab}$ ، $\vec{V}_{bc}$ ، و $\vec{V}_{ca}$ را در منبع سه فاز ستاره بیابید؛ ب) کل توان حقیقی، موهومی و ظاهری سه فاز بار موردنظر را محاسبه کنید؛

۱۰- در مدار ارائه شده در شکل (۱۱-۱۵)، اگر به جای امپدانس R_W ، یک امپدانس به مقدار $1 + j1 \Omega$ استفاده شود (آنگاه فرضیات مسئله (۸) را تکرار کنید).

ضمیمه (الف)

ماتریس‌ها و خواص آنان

در تحلیل مدارهای الکتریکی با روش‌های گره، حلقه و دیگر روش‌ها، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی ایجاد می‌شوند که باید این دسته معادلات را حل کرد. این دسته معادلات را می‌توان به روش‌های ماتریسی حل نمود. بدین منظور در این ضمیمه، خصوصیات ماتریس‌ها و جبر ماتریسی را بیان می‌نماییم.

الف-۱) تعاریف اساسی

هر ماتریس، از یک سری عناصر تشکیل شده‌اند که در کنار یکدیگر و داخل دو کروشه قرار می‌گیرند. این عناصر به‌صورت ردیف‌های افقی در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. هر ردیف افقی از این اعداد را یک سطر^۱ می‌گویند و اعداد قرار گرفته در هر ردیف عمودی را ستون^۲ می‌گویند. این اعداد ماتریسی می‌توانند به‌صورت اعداد حقیقی، مختلط و یا توابع مختلف باشند. شکل کلی یک ماتریس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{(الف-۱)}$$

^۱- Row

^۲- Column

که ماتریس مذکور، دارای m سطر و n ستون می‌ماند. هر عنصر از این ماتریس A را به نمایندگی به صورت a_{ij} نشان می‌دهیم که اندیس i بیانگر شماره سطر و j بیانگر ستون عنصر a_{ij} می‌باشند. به عنوان مثال، هر عنصر a_{ij} می‌تواند به صورت‌های نمونه ۱۷ ، $۳+j۲۲$ ، $x^3/x+1$ ، $\tan\sqrt{s}$ و باشند.

در صورتی که ماتریس A دارای یک سطر باشد به آن، ماتریس سطری^۱ می‌گویند که اصطلاحاً بردار سطری هم گفته می‌شود. اگر ماتریس A دارای یک ستون باشد به آن، ماتریس ستونی^۲ یا بردار ستونی می‌گویند. هر عنصر یک بردار سطری به صورت a_{1j} نامیده می‌شود و هر عضو یک بردار ستونی به شکل a_{i1} می‌گویند. به عنوان نمونه از چند ماتریس زیر می‌توان نام برد:

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۶ & ۷ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۱+j۲ \\ ۳j \\ ۴ \end{bmatrix}, \quad C = [x_1 \quad x_2], \quad D = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

که A ماتریس ۳×۲ (عدد سه به معنای تعداد سطر و عدد دو به معنای تعداد ستون است)، B یک بردار ستونی ۳×۱ ، C یک بردار سطری ۱×۲ ، و D یک ماتریس ۲×۲ است.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آنها با هم برابرند به نام ماتریس‌های مربعی^۳ معروف هستند.

ماتریس متقارن: یک ماتریس مربعی را ماتریس متقارن^۴ گویند اگر فقط اگر $a_{ij}=a_{ji}$ باشد. نمونه از این ماتریس را می‌توان در زیر مشاهده نمود:

$$E = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۳})$$

ماتریس قطری: یک ماتریس مربعی که اعضاء قطری آن غیر صفر و اعضاء غیرقطری برابر صفر باشند به نام ماتریس قطری^۵ می‌گویند. اعضاء قطری، اعضایی هستند که شماره سطر و ستون آنها با هم برابرند. به عنوان مثال می‌توان به ماتریس قطری زیر اشاره نمود:

^۱- Row Matrix

^۲- Column Matrix

^۳- Square Matrix

^۴- Symmetric Matrix

^۵- Diagonal Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۴})$$

ماتریس واحد: یک ماتریس قطری که اعضای قطری آن، برابر واحد باشند به نام ماتریس واحد معروف می‌باشد. مثلاً،

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۵})$$

معمولاً ماتریس واحد را با **I** نشان می‌دهند که ماتریس فوق، یک ماتریس واحد 3×3 می‌باشد.

الف-۲) خواص اساسی جبر ماتریس‌ها

در این بخش، خواص اساسی ماتریس‌های موردنظر در این کتاب بیان می‌گردد.

تساوی دو ماتریس: از شروط تساوی دو ماتریس **A** و **B**، آن است که اولاً دو ماتریس **A** و **B** دارای تعداد سطرهای مساوی و تعداد ستون‌های مساوی باشند، ثانیاً اعضای متناظر در هر ماتریس **A** و **B** با هم برابر باشند. یعنی اگر a_{ij} عضو نماینده ماتریس **A** و b_{ij} عضو نماینده ماتریس **B** باشد آنگاه برای تساوی دو ماتریس **A** و **B**، باید خاصیت $a_{ij} = b_{ij}$ برقرار باشند.

جمع و تفریق دو ماتریس: مشابه تساوی دو ماتریس، جمع و یا تفریق ماتریس‌ها نیز باید با ابعاد سطر و ستون یکسان باشند. آنگاه در جمع دو ماتریس، اعضای متناظر با هم جمع می‌شوند و در تفریق دو ماتریس، اعضای متناظر از هم کم می‌شوند. به عنوان مثال، اگر $C = A - B$ باشد آنگاه هر عضو c_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (\text{الف-۶})$$

ضرب یک ماتریس در یک عدد: در صورتی که ماتریس **A** در یک عدد یا تابع k ضرب شود آنگاه این عدد k در تمام اعضای ماتریس **A** ضرب می‌شود. به عبارت دیگر، هر عضو

جدید از ماتریس kA برابر مقدار $k.a_{ij}$ خواهد بود. به عنوان مثال، اگر مقدار $\frac{s}{s^2+1}$ را بخواهیم در ماتریس 2×2 ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{s}{s^2+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{2s}{s^2+1} \\ \frac{3s}{s^2+1} & \frac{4s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس A و B : برای اینکه بتوانیم ماتریس A را در B ضرب کنیم (یعنی بخواهیم $C=AB$ را محاسبه کنیم) شرط قطعی در ضرب AB این است که تعداد ستون‌های ماتریس A باید برابر تعداد سطرهاى ماتریس B باشد. یعنی اگر ماتریس A ، $m \times n$ باشد، آنگاه ماتریس B باید دارای تعداد n سطر باشد و مثلاً به صورت $n \times p$ باشد. با ضرب این دو ماتریس، بعد ماتریس C برابر $m \times p$ خواهد بود. حال هر عضو c_{ij} از ماتریس C از حاصل ضرب سطر i ام از ماتریس A در ستون j ام ماتریس B به دست می‌آید. یعنی اگر،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & b_{np} \end{bmatrix},$$

(الف-۷)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & . & c_{mp} \end{bmatrix}$$

آنگاه عضو c_{ij} از ماتریس C (یعنی c_{ij}) از ضرب برداری سطر i ام از ماتریس A در ستون j ام از ماتریس B به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$c_{ij} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad . \quad . \quad a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (\text{الف-۸})$$

به عنوان مثال، حاصل ضرب دو ماتریس **A** و **B** با مشخصات زیر برابر است:

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b+5c & 2a+4b+6c \\ d+3e+5f & 2d+4e+6f \end{bmatrix}$$

همچنین اگر **A** یک بردار ستونی و **B** یک بردار سطری باشد و به صورت زیر مشخص شده باشند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

آنگاه $C=AB$ برابر است با:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

در این مثال، چون ماتریس **A** با ابعاد 3×1 (بردار ستونی) و ماتریس **B** با ابعاد 1×3 (بردار سطری) است لذا بعد ماتریس $C=AB$ با ابعاد 3×3 خواهد بود. از طرف دیگر، اگر حاصل ضرب **BA** را بدست آوریم آنگاه،

$$D = BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

یعنی یک ماتریس با بعد 1×1 و یا عبارت ساده تر، یک عدد می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم که خاصیت جابجایی در ضرب ماتریس‌ها وجود ندارد؛ یعنی $AB \neq BA$ خواهد بود.

دترمینان یک ماتریس: دترمینان یک ماتریس مربعی، یک مقدار عددی خواهد بود که با محصور کردن دو خط عمودی در دو طرف ماتریس مشخص می‌شود. مثلاً دترمینان ماتریس **A** را با $|A|$ نشان می‌دهیم. برای تعیین دترمینان هر ماتریس، ابتدا آن ماتریس را بر حسب می‌نورهای آن بسط می‌دهیم. بسط دادن مذکور به این صورت است که ابتدا یک سطر z ام یا یک ستون k ام را طور دلخواه انتخاب می‌کنیم. سپس هر عضو از سطر یا ستون انتخابی را در می‌نور آن عضو و در ضریب $(-1)^{z+k}$ ضرب می‌کنیم. سپس این حاصل ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. می‌نور عنصری که روی سطر z ام و ستون k ام قرارداد، دترمینانی است که از حذف سطر z و ستون k حاصل می‌شود. این موضوع را با مثال‌های ساده‌ای بیان می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم دترمینان ماتریس **A** به صورت $A = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنیم. بدین منظور، یک سطر یا ستون از ماتریس **A** را انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر اول را انتخاب می‌کنیم. عضو اول از این سطر، r_1 است که باید در ضریب $(-1)^{1+1}$ و در مینور آن ضرب شود. برای تعیین مینور عضو r_1 ، سطر و ستون متناظر آن را حذف می‌کنیم که عضو باقیمانده r_4 می‌شود. پس جمله اول از دترمینان، برابر $r_1 r_4 (-1)^{1+1}$ می‌باشد. عضو دوم از سطر انتخابی، r_2 می‌باشد که باید در ضریب $(-1)^{1+2}$ و در مینور آن ضرب شود. مینور عضو r_2 برابر r_3 می‌باشد؛ یعنی $r_2 r_3 (-1)^{1+1}$ می‌باشد. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$|A| = (-1)^{1+1}(r_1 r_4) + (-1)^{1+2}(r_2 r_3) = r_1 r_4 - r_2 r_3 \quad (\text{الف-۹})$$

در صورتی که سطر یا ستون انتخابی را ستون اول انتخابی کنیم باز به همین جواب دترمینان **A** می‌رسیم. بدین منظور، برای تعیین دترمینان **A** بر حسب ستون اول می‌توان نوشت:

$$|A| = (-1)^{1+1}(r_1 r_4) + (-1)^{2+1}(r_2 r_3) = r_1 r_4 - r_2 r_3 \quad (\text{الف-۱۰})$$

که مینور عضو r_3 برابر r_4 می‌باشد.

حال همین روال را می‌توان برای ماتریس‌های با ابعاد بزرگ نیز نشان داد. مثلاً فرض کنید که ماتریس **B** به صورت زیر می‌باشد:

$$B = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۱})$$

حال باید مشابه حالت قبل، یک سطر یا ستون را به دلخواه انتخاب کنیم. معمولاً مناسب است سطر یا ستونی انتخاب شود که دارای اعضاء صفر بیشتری باشند. در اینجا سطر اول را به عنوان انتخاب مورد نظر، در نظر می‌گیریم. آنگاه $|B|$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|B| = (-1)^{1+1}(r_1) \begin{vmatrix} r_5 & r_6 \\ r_8 & r_9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(r_2) \begin{vmatrix} r_4 & r_6 \\ r_7 & r_9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(r_3) \begin{vmatrix} r_4 & r_5 \\ r_7 & r_8 \end{vmatrix} \quad (\text{الف-۱۲})$$

از رابطه اخیر در می‌یابیم که برای محاسبه دترمینان **B** با ابعاد 3×3 نیاز به تعیین دترمینان سه مینور اعضاء r_1 ، r_2 ، و r_3 می‌باشد. در نهایت با استفاده از رابطه (الف-۹) خواهیم داشت:

$$|B| = (-1)^{1+1}(r_1)(r_5 r_9 - r_6 r_8) + (-1)^{1+2}(r_2)(r_4 r_9 - r_6 r_7) + (-1)^{1+3}(r_3)(r_4 r_8 - r_5 r_7) \\ |B| = r_1(r_5 r_9 - r_6 r_8) - r_2(r_4 r_9 - r_6 r_7) + r_3(r_4 r_8 - r_5 r_7) \quad (\text{الف-۱۳})$$

به عنوان مثال، دیگر اگر ماتریس **R** به صورت زیر می‌باشد:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

آنگاه $|R|$ ، با انتخاب سطر اول برابر است با:

$$\begin{aligned} |R| &= (-1)^{1+1}(3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(40-9) - (-2)(-16-3) + (-1)(+6+5) = 3 \times 31 + 2(19) + (-1)(11) = 44 \end{aligned}$$

الف-۳) نمایش ماتریسی معادلات جبری

یکی از کاربردهای اساسی عملیات ماتریسی، استفاده در حل معادلات جبری می‌باشد. به عنوان مثال، فرض کنید که یک دستگاه دو معادله دو مجهولی به شکل زیر موردنظر باشد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases} \quad (\text{الف-۱۴})$$

اعداد و متغیرهای ارائه شده در معادله (الف-۱۴) را می‌توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۵})$$

حال نمایش دسته معادلات (الف-۱۴) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = Y \quad (\text{الف-۱۶})$$

به عبارت دیگر، ضرب ماتریس ضرایب A در بردار X به این صورت انجام می‌شود که هر سطر ماتریس A در ستون بردار X ضرب می‌شود. یعنی،

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۷})$$

در حالت کلی، یک دسته n معادله، n مجهول را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۸})$$

که هر معادله i ام از n دسته معادله را می توان به شکل کلی زیر نوشت:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{الف-۱۹})$$

به عبارت دیگر، رابطه اخیر نشان دهنده آن است که سطر i ام در بردار ستونی متغیرهای x (یعنی X) ضرب می شود. حال می خواهیم با فرض معلوم بودن اعداد ماتریس A به عنوان ماتریس ضرایب و اعداد بردار Y به عنوان بردار سمت راست تساوی، بردار مجهولات X را بیابیم. ساده ترین راه، استفاده از روش کرامر در تعیین مقدار مجهولات است. در روش کرامر، ابتدا باید دترمینان ماتریس A را تعیین کنیم. حال اگر بخواهیم عضو مجهول x_1 را تعیین کنیم ابتدا یک ماتریس جدیدی ایجاد می کنیم. این ماتریس جدید از جایگزینی بردار ستونی Y در ستون اول از ماتریس A است. سپس دترمینان این ماتریس جدید را به دست می آوریم تا در نهایت، با تقسیم دترمینان مذکور بر دترمینان ماتریس A ، مقدار x_1 حاصل شود. برای محاسبه x_2 تنها تفاوتی که با محاسبه x_1 دارد آن است که در تعیین ماتریس جدید، بردار Y در ستون دوم از ماتریس A جایگزین شده و سپس دترمینان ماتریس جدید بر دترمینان ماتریس A تقسیم می شود. در نهایت، برای محاسبه x_n ، ابتدا بردار Y در ستون n ام از ماتریس A جایگزین شده و با تعیین دترمینان ماتریس جدید و تقسیم آن بر دترمینان A ، مقدار x_n محاسبه می شود. این روند را می توان در مثال زیر مشاهده نمود. فرض کنید بخواهیم دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} 7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \\ -3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \\ -4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 5 \end{cases}$$

ابتدا این سه معادله را به شکل ماتریسی و مطابق شکل ارائه شده در معادله (الف-۸) می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

که در نتیجه متغیرهای بردار مجهول، v_1 ، v_2 ، و v_3 می باشد. یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

برای تعیین مجهولات v_1 ، v_2 ، و v_3 ابتدا باید دترمینان ماتریس A را بدست آوریم که،

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(7) \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3) \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-4) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 191$$

حال برای تعیین مجهول v_1 ، ماتریس جدیدی با جایگزینی بردار Y در ستون اول ماتریس A ایجاد کرده و دترمینان آن را ایجاد می‌کنیم. یعنی،

$$\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(-11) \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3) \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-4) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 191$$

در نتیجه مقدار $v_1 = 191/191 = 1$ می‌باشد. همچنین برای مقدار v_2 و v_3 خواهیم داشت:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 11 \end{vmatrix}}{191} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2$$

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{191} = \frac{1092 - 291 - 228}{191} = 3$$

مزیت این روش آن است که در صورتی که نیاز به محاسبه یک متغیر از بردار مجهولات X باشد نیاز به یک سری محاسبه وجود دارد.

ضمیمه (ب)

اعداد مختلط و خواص آنان

در مطالعات مدارهای با حالت دائمی سینوسی در فصل هفتم، نیاز به استفاده از اعداد و متغیرهای مختلط داشتیم. لذا در این ضمیمه به دنبال آن هستیم تا تعاریف مرتبط با اعداد مختلط و خواص جبر اعداد مختلط را که در مطالعه این کتاب به آنها نیاز داریم، بیان نماییم.

ب-۱) تعاریف مرتبط با اعداد مختلط

یک عدد مختلط $\bar{z}$ از یک زوج مرتب به صورت (x, y) تشکیل شده است که مقدار x را قسمت حقیقی^۱ و مقدار y را قسمت موهومی^۲ عدد مختلط $\bar{z}$ می‌نامیم. شکل متداول نمایش یک عدد مختلط $\bar{z}$ به صورت نمایش دکارتی است که،

$$\bar{z} = x + jy \quad (\text{ب-۱})$$

$$x = \text{Re}(\bar{z}) \quad (\text{ب-۲})$$

$$y = \text{Im}(\bar{z}) \quad (\text{ب-۳})$$

که در رابطه (ب-۱)، متغیر z بردار یکه در محور y است و $z^2 = -1$ یا $z = \sqrt{-1}$ می‌باشند. همچنین $\text{Re}(\bar{z})$ به معنای قسمت حقیقی عدد مختلط $\bar{z}$ و $\text{Im}(\bar{z})$ قسمت موهومی عدد مختلط $\bar{z}$ است. این نمایش دکارتی در شکل (ب-۱) نشان داده شده است.

^۱ - Real Part

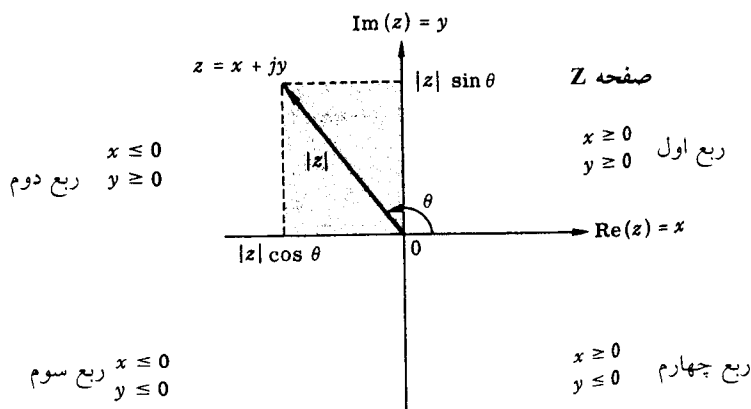
^۲ - Imaginary Part

نمایش دیگر عدد مختلط به شکل نمایش قطبی آن می باشد. به عبارت دیگر، در این شکل نمایش، یک عدد مختلط (که به صورت یک بردار در صفحه $x-y$ می باشد) با اندازه آن بردار $|Z|$ و زاویه آن نسبت به محور x یعنی θ مشخص می گردد که،

$$\vec{Z} = |Z|e^{j\theta} \quad (\text{ب-۴})$$

در این رابطه، $|Z|$ طول (اندازه) بردار عدد مختلط و θ زاویه آن بردار با محور x است که این شکل نمایش نیز در شکل (ب-۱) آورده شده است. شکل دیگر نمایش قطبی به صورت زیر انجام می شود:

$$\vec{Z} = |Z| \angle \theta \quad (\text{ب-۵})$$



شکل (ب-۱): نمایش اعداد مختلط به صورت نمایش دکارتی و قطبی

حال می خواهیم ارتباط بین نمایش دکارتی و قطبی اعداد مختلط را به دست آوریم.

ب-۲) تبدیل نمایش اعداد مختلط به یکدیگر

فرض کنید که عدد مختلطی به صورت نمایش دکارتی آن و بر اساس معادله (ب-۱) داده شده باشد. با توجه به شکل (ب-۱) اندازه این عدد مختلط را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ب-۶})$$

و برای تعیین زاویه این بردار با محور x خواهیم داشت:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{ب-۷})$$

در نتیجه،

$$\bar{Z} = \sqrt{x^2 + y^2} \angle \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{ب-۸})$$

حال اگر یک عدد مختلط به شکل نمایش قطبی آن و به صورت ارائه شده در رابطه (ب-۴) یا (ب-۵) باشد آنگاه قسمت حقیقی و موهومی این عدد مختلط برابر است با:

$$x = |Z| \cos \theta \quad (\text{ب-۹})$$

$$y = |Z| \sin \theta \quad (\text{ب-۱۰})$$

در نتیجه،

$$\bar{Z} = |Z| \cos \theta + j|Z| \sin \theta \quad (\text{ب-۱۱})$$

لازم به ذکر است که با استفاده از رابطه اولر که $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ می توان از رابطه (ب-۴) نیز به رابطه (ب-۱۱) رسید. البته لازم به ذکر است که رابطه $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ زاویه بردار (عدد مختلط) را متناظر با ربع اول و چهارم می دهد. لذا باید قسمت های حقیقی و موهومی عدد مختلط توجه داشت تا تأثیر مکان بردار را در زاویه θ مشخص نمود. به عبارت دیگر، اگر بردار موردنظر در ربع دوم یا سوم باشد، باید به زاویه محاسبه شده، مقدار ۱۸۰ درجه اضافه شود.

ب-۳) خواص اعداد مختلط

در ابتدا مزدوج یک عدد مختلط را بیان می کنیم. مفهوم مزدوج یک عدد مختلط، آن است که اگر فرم نمایش آن به شکل دکارتی باشد، آنگاه باید قسمت موهومی آن در یک عدد منفی ضرب شود. یعنی اگر $\bar{Z} = x + jy$ باشد آنگاه $\bar{Z}^* = x - jy$ خواهد بود که $\bar{Z}^*$ مزدوج عدد مختلط $\bar{Z}$ است. همچنین اگر فرم نمایش عدد مختلط به شکل قطبی و به صورت $\bar{Z} = |Z| \angle \theta$ باشد آنگاه مزدوج عدد مختلط به این معنی است که زاویه آن در یک عدد منفی ضرب شود؛ یعنی $\bar{Z}^* = |Z| \angle -\theta$.

ضرب یک عدد حقیقی در عدد مختلط: در صورتی که یک عدد حقیقی k در یک عدد مختلط $\bar{Z}$ ضرب شود، در شکل نمایش دکارتی و قطبی آن، حاصل برابر است با:

$$k(\bar{Z}) = K(x + jy) = kx + jky \quad (\text{ب-۱۲})$$

$$k(\bar{Z}) = K(|Z| \angle \theta) = k|Z| \angle \theta \quad (\text{ب-۱۳})$$

همچنین اگر ضریب $\frac{1}{k}$ در عدد مختلط ضرب می‌شود، در شکل دکارتی آن، هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی آن بر عدد k تقسیم می‌شود. بعلاوه در شکل قطبی $\bar{Z}$ ، اندازه آن بر عدد k تقسیم می‌گردد.

جمع و تفریق دو عدد مختلط: فرض کنید دو عدد مختلط $\bar{Z}_1 = x_1 + jy_1$ و $\bar{Z}_2 = x_2 + jy_2$ مد نظر است. حال برای جمع یا تفریق کردن دو عدد مختلط $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ ، باید قسمت‌های حقیقی با یکدیگر و قسمت موهومی آنان با یکدیگر جمع یا تفریق شوند. یعنی،

$$\bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \quad (\text{ب-} 14)$$

حال در صورتی که اعداد مختلط به صورت نمایش قطبی باشد، باید آنان را ابتدا به شکل نمایش دکارتی درآورد و سپس، عملیات جمع یا تفریق را بر روی آنان انجام داد.

ضرب دو عدد مختلط: برای ضرب دو عدد مختلط با نمایش دکارتی، می‌توان مثل ضرب معمولی عمل کرد؛ با این تفاوت که عملگر $-1 = j^2 = j \times j = -j = -j^3$ می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 \times \bar{Z}_2 &= (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = \\ &= (x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \quad (\text{ب-} 15)$$

حال اگر دو عدد مختلط با نمایش قطبی باشند (یعنی $\bar{Z}_1 = |Z_1| \angle \theta_1$ و $\bar{Z}_2 = |Z_2| \angle \theta_2$ باشد) آنگاه حاصل ضرب این دو عدد مختلط دارای اندازه $|Z_1||Z_2|$ و زاویه $\theta_1 + \theta_2$ خواهد بود. یعنی،

$$\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 = (|Z_1| \angle \theta_1)(|Z_2| \angle \theta_2) = |Z_1||Z_2| \angle \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{ب-} 16)$$

تقسیم دو عدد مختلط: در صورتی که دو عدد مختلط موردنظر با نمایش دکارتی باشند، ابتدا باید مخرج را در مزدوج آن ضرب کنیم تا مخرج به صورت یک عدد حقیقی در آید. به این منظور داریم:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \times \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{ب-} 17)$$

همچنین اگر دو عدد مختلط موردنظر با نمایش قطبی باشند، آنگاه کافی است که اندازه دو عدد مختلط بر هم تقسیم شده و زاویه دو عدد مختلط از هم کم شوند. یعنی،

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{(|Z_1| \angle \theta_1)}{(|Z_2| \angle \theta_2)} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \angle \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{ب-} 18)$$

به عنوان مثال، اگر دو عدد مختلط به صورت $1 - j$ و $2 + j$ باشند آنگاه،

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 &= (1-j)(2+j2) = 4 + jo \\ \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 &= (1-j)(2+j2) = (\sqrt{2}e^{-j45})(2\sqrt{2}e^{j45}) = 4e^{-jo} = 4 \\ \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} &= \frac{(1-j)}{(2+j2)} \times \frac{2-j2}{2-j2} = \frac{(2-2) + j(-2-2)}{4+4} = -\frac{1}{2}j \\ \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} &= \frac{(1-j)}{(2+j2)} = \frac{\sqrt{2}e^{-j45}}{2\sqrt{2}e^{j45}} = \frac{1}{2}e^{-j90} = -\frac{1}{2}j\end{aligned}$$

توان و ریشه برای اعداد مختلط: فرض کنید یک عدد مختلط $\bar{Z} = x + jy$ به توان عدد صحیح n برسد. برای به توان رساندن این عدد مختلط، مناسب است که عدد مذکور را به شکل قطبی نمایش دهیم. پس از قطبی شدن عدد مختلط، در صورت به توان n رسیدن، اندازه عدد مختلط به توان n و زاویه آن نیز n برابر می شود. لذا،

$$\bar{Z}^n = (x + jy)^n = (|Z|\angle\theta)^n = |Z|^n \angle n\theta \quad (\text{ب-۱۹})$$

که $x + jy = |Z|\angle\theta$ می باشد.

به همین طریق اگر از یک عدد مختلط $\bar{Z}$ ، ریشه m ام آن گرفته شود آنگاه مشابه رابطه (ب-۱۹) خواهیم داشت:

$$\sqrt[m]{\bar{Z}} = (\bar{Z})^{\frac{1}{m}} = (|Z|\angle\theta)^{\frac{1}{m}} = |Z|^{\frac{1}{m}} \angle \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi k}{m} = \sqrt[m]{|Z|} \angle \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi k}{m} \quad (\text{ب-۲۰})$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم $\sqrt[3]{1+jo}$ را بیابیم آنگاه می توان نوشت:

$$\sqrt[3]{(1+jo)} = (1+jo)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} \angle \frac{0}{3} + \frac{2\pi k}{3}$$

حال برای $k = 0, 1, 2$ خواهیم داشت:

$$\sqrt[3]{(1+jo)} = \begin{cases} 1\angle 0 = 1 + jo \\ 1\angle \frac{2\pi}{3} = -0.5 + j0.866 \\ 1\angle \frac{4\pi}{3} = -0.5 - j0.866 \end{cases}$$

کتابنامه

- 1- W. H. Hayt and J. E. Kemmerly, *Engineering Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1986.
- 2- S. Madhu, *Linear Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1988.
- 3- S. Karni, *Analysis of Electrical Networks*, Jhon Wiley & Sons, 1986.
- 4- R. E. Thomas and A. J. Rosa, *The Analysis and Design of Linear Circuits*, Jhon Wiley & Sons, 2004.
- 5- L. J. Tung and B. W. Kwan, *Circuit Analysis*, World Scientific Publishing Company, 2001.
- 6- A. M. Davis, *Linear Circuit Analysis*, PWS Publishing Company, 1998.
- 7- S. A. Boctor, *Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1992.
- 8- D. E. Johnson, J. L. Hilburn and J. R. Johnson, *Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1992.
- 9- L. P. Huelsman, *Basic Circuit Theory with Digital Computation*, Prentice-Hall, 1973.
- 10- A. E. Fitzgerald, D. E. Higginbotham and A. Grabel, *Basic Electrical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1982.
- 11- P. E. Bennett, *Advanced Circuit Analysis*, Harcourt Brace Jovanovich, 1992.
- 12- R. L. Boylestad, *Introductory Circuit Analysis*, Macmillan Company, 1994.

- 13- S. Gupta, J. W. Bayless and B. Peikari, *Circuit Analysis with Computer Applications to Problem Solving*, Wiley Eastern Limited, 1972.
- 14- C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Basic Circuit Theory*, McGraw- Hill Book Company, 1969.
- 15- J. Staudhammer, *Circuit Analysis by Digital Computer*, Prentice-Hall, 1975.
- 16- J. D. Irwin, *Basic Engineering Circuit Analysis*, Collier Macmillan, 1984.
- 17- J. L. Stewart, *Circuit Theory and Design*, Jhon Wiley & Sons, 1956.
- 18- G. Williams, *An Introduction to Electrical Circuit Theory*, Collier Macmillan, 1973.
- 19- M. R. Taber and E. M. Silgalis, *Electric Circuit Analysis*, Hough Mifflin Company, 1980.
- 20- R. E. Armington and C. Volz, *An Introduction to Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1961.
- 21- D. E. Johnson, J. L. Hilburn and J. R. Johnson, *Basic Electric Circuit Analysis*, Prentice-Hall, 1984.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

(ا)

Cascade Connection	اتصال پشت سر هم
Stator	استاتور
Elastance	الاستانس
Self Inductance	اندوکتانس خودی
Inductance	اندوکتانس سلفی
Mutual Inductance	اندوکتانس متقابل
Reciprocal Inductance	اندوکتانس معکوس
Ohm	اهم

(ب)

Electric Charge	بار الکتریکی
Partial Fraction Expansion	بسط کسرهاى جزى
Lossless	بى اتلاف

(پ)

Open Circuit Impedance Parameters	پارامترهاى امپدانس مدار باز
Short Circuit Admittance Parameters	پارامترهاى ادمیتانسى اتصال کوتاه
Network Parameters	پارامترهاى شبکه
Zero State Response	پاسخ حالت صفر
Complete Response	پاسخ کامل
Zero Input Response	پاسخ ورودى صفر
Lag	پس فاز
Lead	پیش فاز

(ت)

Pulse Function	تابع پالس
Step Function	تابع پله
Network Function	تابع شبکه
Ramp Function	تابع شیب
Impulse Function	تابع ضربه
Laplace Transformation	تبدیل لاپلاس
Network Topology	توپولوژی مدار

(ج)

Electric Current	جریان الکتریکی
Associated Reference Direction	جهت قراردادی متناظر

(چ)

Characteristic Polynominal	چند جمله‌ای مشخصه
----------------------------	-------------------

(ح)

Loop	حلقه
Time Domain	حوزه زمان
Frequency Domain	حوزه فرکانس

(خ)

Capacitor	خازن
Magnetic Flux	خطوط شار مغناطیسی

(د)

Amplitude	دامنه
-----------	-------

(ر)

Euler Equation	رابطه اولر
Reactance	راکتانس القایی
Conductance	رسانایی
Magnetic Reluctance	رلوکتانس مغناطیسی

Superposition Method	روش جمع‌آثار
	(ز)
Phase Angle	زاویه فاز
	(س)
Column	ستون
Row	سطر
Inductor	سلف
Coupled Inductors	سلف‌های تزویج شده
	(ش)
Branch	شاخه
Unforced Network	شبکه بی تحریک
Non-Planar Graph	شبکه غیرمسطح
Planar Graph	شبکه مسطح
Continuity Condition	شرط پیوستگی
	(ص)
Complex Frequency Plane	صفحه فرکانس مختلط
	(ض)
Coefficient of Coupling	ضریب تزویج
Power Factor	ضریب قدرت
	(ظ)
Capacitance	ظرفیت خازنی
	(ع)
Coupling Elements	عناصر تزویج شونده
Active Element	عنصر اکتیو
Passive Element	عنصر پسیو
Lumped Element	عنصر فشرده
Distributed Element	عنصر گسترده

(ف)

Farad	فاراد
Polar Form	فرم قطبی

(ق)

Euler's Identity	قاعده اولر
Kirchhoff's Current Law	قانون جریان کیرشهف
Kirchhoff's Voltage Law	قانون ولتاژ کیرشهف
Real Part	قسمت حقیقی
Imaginary Part	قسمت موهومی
Thevenin Theorem	قضیه تونن
Norton Theorem	قضیه نورتن
Kirchhoff's Laws	قوانین کیرشهف

(ک)

Coulomb	کولن
---------	------

(گ)

Node	گره
------	-----

(م)

Symmetric y-Parameter Matrix	ماتریس پارامترهای ادمیتانس متقارن
Symetric z-papameter Matrix	ماتریس پارامترهای امپدانس متقارن
Column Matrix	ماتریس ستونی
Row Matrix	ماتریس سطری
Diagonal Matrix	ماتریس قطری
Symmetric Matrix	ماتریس متقارن
Square Matrix	ماتریس مربعی
Hybrid Matrix	ماتریس هایبرید
Line Variable	متغیر خطی
Phase Variable	متغیر فازی
Open Circuit	مدار باز
Short Circuit	مدار اتصال کوتاه

First Order Circuits	مدارهای مرتبه اول
Second Order Circuits	مدارهای مرتبه دوم
Characteristic Equation	معادله مشخصه
Resistance	مقاومت الکتریکی
Independent Sources	منابع الکتریکی مستقل
Dependent Sources	منابع الکتریکی وابسته
Proper	مناسب
Mho	مهو
Critically Damped	میرایی بحرانی
Over Damped	میرایی شدید
Under Damped	میرایی ضعیف
	(ن)
Magnetomotive Force	نیروی محرکه مغناطیسی
	(و)
Weber-turn	وبر-دور
	(هـ)
Henry	هانری